

# 8

## GEOMETRÍA

PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS

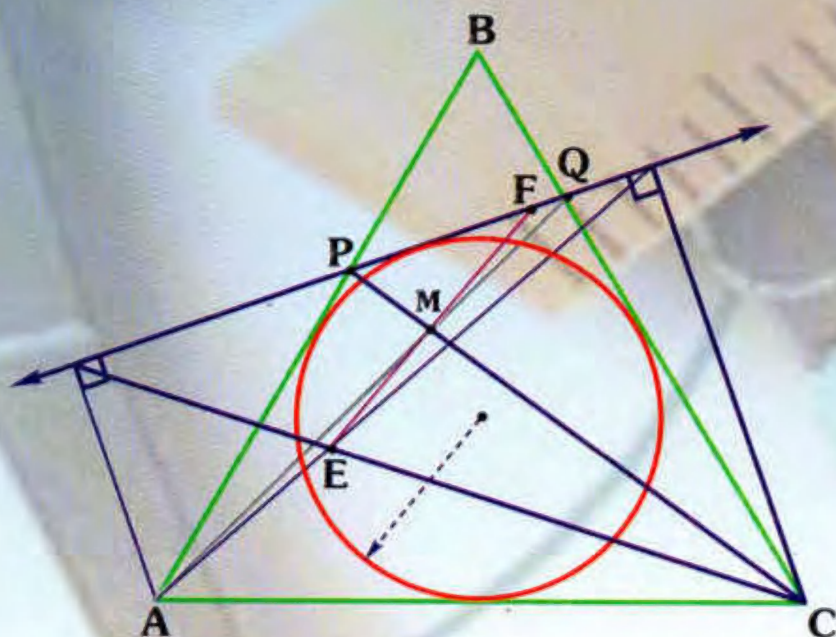
# SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

TEORÍA - DEMOSTRACIONES

TRAZOS AUXILIARES

600 PROBLEMAS RESUELTOS Y PROPUESTOS

JULIO ORIHUELA BASTIDAS



Si el  $\triangle ABC$  es equilátero y el  $\triangle APQC$  es circunscrito, se cumple:  $EM=MF$

**GEOMETRÍA**  
**PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS**  
**SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS**

**TEORÍA - DEMOSTRACIONES**

**300 Problemas Resueltos**

**300 Problemas Propuestos**

**JULIO ORIHUELA BASTIDAS**



*Aportando en la Difusión de la Ciencia y la Cultura*



## **GEOMETRÍA**

# **PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS**

**Autor :** Julio César Orihuela Bastidas

© **Titular de la obra:** Cuzcano Editorial e Imprenta E.I.R.L.

**Diseño y diagramación:** Cuzcano Editorial e Imprenta E.I.R.L.

© **Cuzcano Editorial e Imprenta E.I.R.L.**

Av. Alfonso Ugarte 1310 Of. 212 - Breña - Teléfono 423-8154

Página web: [www.editorialcuzcano.com.pe](http://www.editorialcuzcano.com.pe)

**Primera edición :** junio 2019

**Tiraje :** 1 000 ejemplares

**Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú N°2019-07775**

Prohibida la reproducción de esta obra por cualquier medio, total o parcialmente.  
Derechos reservados D.Leg. N°822

**Distribución y ventas al por mayor y menor**

Av. Alfonso Ugarte 1310 Of. 212 - Breña - Teléfono 423-8154

---

Esta obra se terminó de imprimir en los talleres gráficos de  
Cuzcano Editorial e Imprenta E.I.R.L. en el mes de junio de 2019

Jr. Coricancha N°675 Urb. Zárate S.J.L.  
Av. Alfonso Ugarte 1310 Of. 212 - Breña

Teléfono 423-8154



Con el objetivo de seguir contribuyendo en la formación de nuestra juventud preuniversitaria y como material de apoyo a los docentes matemáticos, presento este nuevo libro: "Proporcionalidad de segmentos y Semejanza de triángulos".

Es grato ver el avance en el campo de la matemática en nuestro Perú, los éxitos logrados por nuestros estudiantes es fruto de su gran esfuerzo y dedicación, así como la inversión de algunas instituciones privadas y del apoyo y colaboración de muchos profesores. Con el propósito de seguir aportando y llegar a más lugares, es que he elaborado un material para un público amplio.

El tema de la "Proporcionalidad de segmentos y Semejanza de triángulos", se relaciona con diversas ramas de las matemáticas, como razones y proporciones, con las fracciones, regla de tres, en la física conceptos como densidad, velocidad, presión, también en la geografía en el uso de escalas y conversiones, así como sus aplicaciones en la realidad: como en la Ingeniería en la elaboración de planos y en la Arquitectura en la construcción de maquetas y así encontraremos muchas aplicaciones más.

El texto nos ayudará a tener una preparación adecuada en el estudio de la "Proporcionalidad de segmentos y Semejanza de triángulos" iniciando con una teoría básica, luego se profundiza con temas que tienen que ver con el análisis de teoremas recíprocos y diversos casos de las propiedades, se finaliza la teoría con temas para Olimpiadas matemáticas, como estudio de la homotecia geometría de masas y de la razón doble. La parte práctica consta de 300 problemas resueltos y 300 problemas propuestos, ordenados de menor a mayor dificultad.

Agradezco las sugerencias y críticas de los lectores.

**Julio Orihuela Bastidas**



## ***Agradecimiento***

---

- A mis padres Moisés y Margarita.
- A todo el grupo de la Editorial Cuzcano.
- A todos mis alumnos y ex alumnos, por su colaboración, por sus consultas y sugerencias.
- A los profesores y amigos: Lucy Casas, Roberto Mariño, Edson Curahua y César Trucios, por su gran apoyo.

## PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA

Pág.

### ♦ PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS ..... 7

- Razón geométrica de los dos segmentos.
- Segmentos proporcionales.
- División de un segmento.
- Teorema de Tales, corolarios.
- Teorema de la bisectriz interior y exterior,
- Teorema del incentro, del excentro.
- Teorema de Menelao, Ceva, Van Aubel.

### ♦ SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS ..... 18

- Definición, criterios, teoremas sobre semejanza.

### ♦ TEMAS ADICIONALES ..... 33

- Estudio del teorema de Menelao, recíproco y aplicaciones.
- Generalización del teorema de Menelao para polígonos.
- Estudio del teorema de Ceva, recíproco, aplicaciones y
- Ceva trigonométrico.

### ♦ DIVISIÓN ARMÓNICA ..... 50

- Definición, teoremas de Descartes, Newton, haz armónico,
- teoremas y aplicaciones.
- Casos de cuaternas armónicas.

### ♦ TEOREMA DE NEWTON ..... 57

### ♦ GEOMETRÍA DE MASAS ..... 59

- Definición, teoremas y aplicaciones



♦ <b>HOMOTECIA</b> .....	63
- Definición, homotecia directa, inversa y aplicaciones.	
♦ <b>RAZÓN DOBLE</b> .....	69
- Definición y aplicaciones (Teorema de Pappus, Pascal y Desargues).	
♦ <b>CIRCUNFERENCIA DE APOLONIO</b> .....	74
Punto de Apolonio	
♦ <b>ENUNCIADO DE LOS PROBLEMAS RESUELTOS</b> .....	77
- Tipo Anual - UNI	
- Tipo Cepre - UNI	
- Tipo Semestral - UNI	
- Tipo Semestral Intensivo - UNI	
- Tipo Repaso - UNI	
♦ <b>SOLUCIONARIO</b> .....	127
♦ <b>ENUNCIADO DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS</b> .....	255
♦ <b>CLAVES DE RESPUESTAS</b> .....	306
<b>ANEXOS</b> .....	308



# PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA

GEOMETRÍA

No hay ninguna rama de las matemáticas, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día a los fenómenos del mundo real.

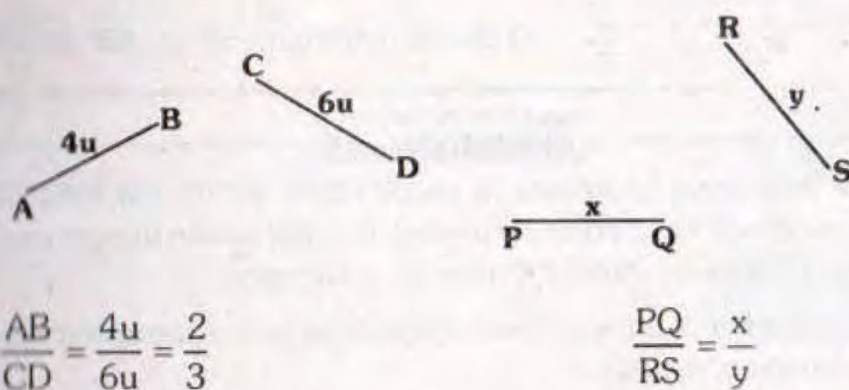
Lobachevsky

## PROPORCIONALIDAD DE SEGMENTOS

Veamos algunas definiciones que tienen que ver con la comparación de dos cantidades (en esta publicación: comparación de segmentos) para su uso posterior en teoremas geométricos.

### RAZÓN GEOMÉTRICA DE DOS SEGMENTOS

Se denomina razón de dos segmentos al resultado de comparar por cociente, las longitudes de dos segmentos expresado en las mismas unidades.

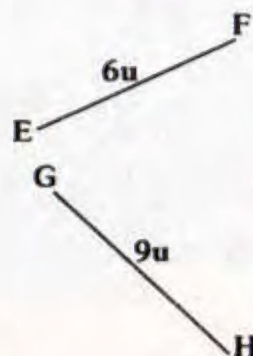
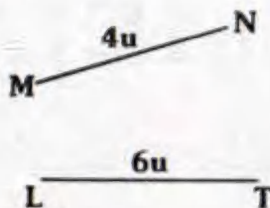
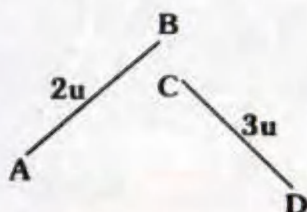


- La razón geométrica o simplemente razón de  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  es  $2/3$  y la razón de  $\overline{PQ}$  y  $\overline{RS}$  es  $x/y$ .
- Se lee: AB es como 2 y CD como 3 o también se puede escribir:  $3(AB) = 2(CD)$



## SEGMENTOS PROPORCIONALES

Es la igualdad de dos o más razones.



Podemos observar:

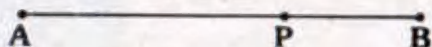
$$\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{LT} = \frac{EF}{GH} = \frac{2}{3}$$

Decimos que  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  son proporcionales con  $\overline{MN}$  y  $\overline{LT}$  y a su vez con  $\overline{EF}$  y  $\overline{GH}$

## DIVISIÓN DE UN SEGMENTO

### DIVISIÓN INTERNA

Si un punto está entre los extremos de un segmento (*distinto de dichos extremos*) se dice que lo divide internamente.



El punto P divide internamente a  $\overline{AB}$  en la razón:  $\frac{AP}{PB}$  y P divide a  $\overline{BA}$  en la razón  $\frac{BP}{PA}$

### DIVISIÓN EXTERNA

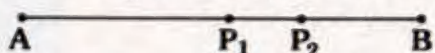
Si un punto está ubicado en alguna de las prolongaciones de un segmento, se dice que lo divide externamente.



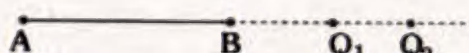
Q divide externamente a  $\overline{AB}$  en la razón  $\frac{AQ}{QB}$

### Observación

- En esta parte solo consideraremos la razón como la de sus longitudes, es decir  $AP = PA$ , pero veremos en la parte de anexos una definición importante: "SEGMENTOS DIRIGIDOS", donde:  $AP \neq PA$  (similar a vectores).
- Si dos puntos dividen a un segmento internamente o exteriormente en la misma razón dichos puntos coinciden.



$$\text{Si } \frac{AP_1}{P_1B} = \frac{AP_2}{P_2B} \Rightarrow P_1 = P_2$$

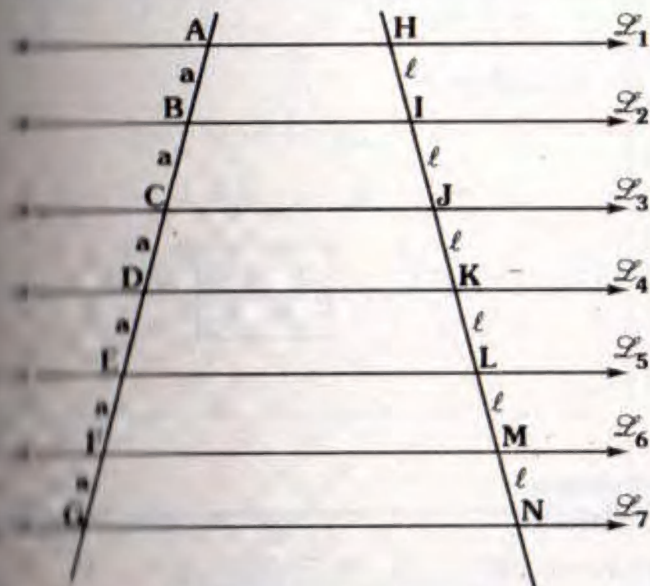


$$\text{Si } \frac{AQ_1}{Q_1B} = \frac{AQ_2}{Q_2B} \Rightarrow Q_1 = Q_2$$



### TEOREMA (DE LAS RECTAS EQUIPARALELAS)

Si tres o más rectas paralelas determinan sobre una secante segmentos congruentes también determinan segmentos congruentes en cualquier otra secante.



Si:  $\vec{l}_1 \parallel \vec{l}_2 \parallel \vec{l}_3 \parallel \vec{l}_4 \parallel \vec{l}_5 \parallel \vec{l}_6$   
y  $AB=BC=CD=DE=EF=FG$

Se cumple:

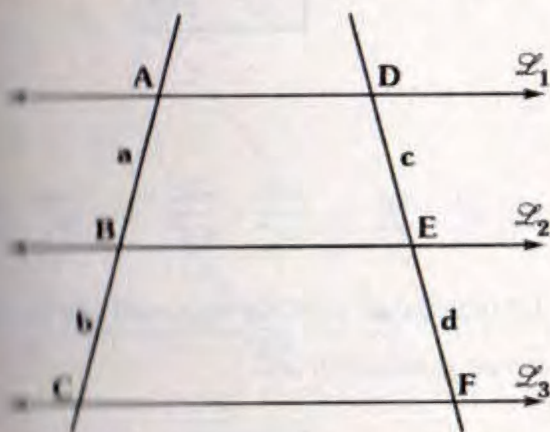
$$HI = IJ = JK = KL = LM = MN$$

**Prueba**

- 1. Basta observar que en el trapecio ACJH,  $\overline{BI}$  es su base media  $\Rightarrow HI=IJ$
- 2. Análogamente se procede en los demás trapecios  $\Rightarrow HI=IJ=JK=KL=LM=MN$

### TEOREMA DE TALES

Si dos rectas cualesquiera son intersectadas por un conjunto de rectas paralelas, entonces sobre dichas rectas se determinan segmentos proporcionales.



En el gráfico,  $\vec{l}_1 \parallel \vec{l}_2 \parallel \vec{l}_3$

Se cumple:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

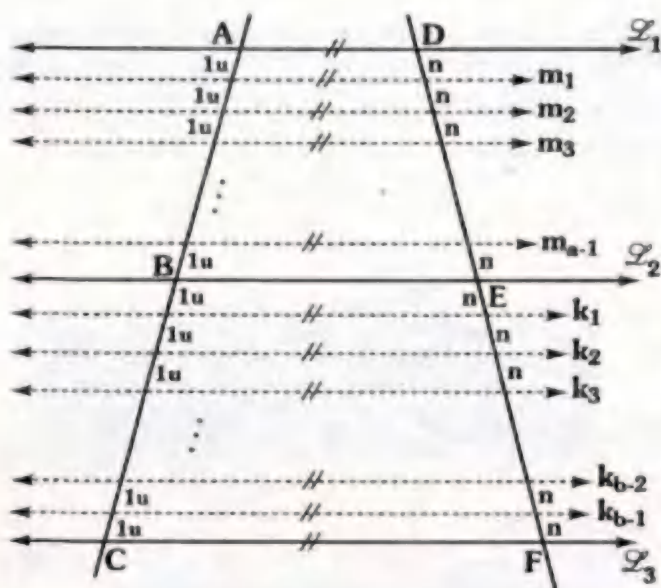
O también:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

### Demostración

Haremos la prueba para el caso en que  $\frac{a}{b}$  es racional (el caso en que sea irracional lo veremos en los anexos).





- El segmento AB lo dividimos en "a" partes iguales y el segmento EF en "b" partes entonces en DF se determinan también partes iguales al trazar paralelas  $m_1, m_2, \dots, m_{a-1}$ , y  $k_1, k_2, \dots, k_{b-1}$ .

• Luego:

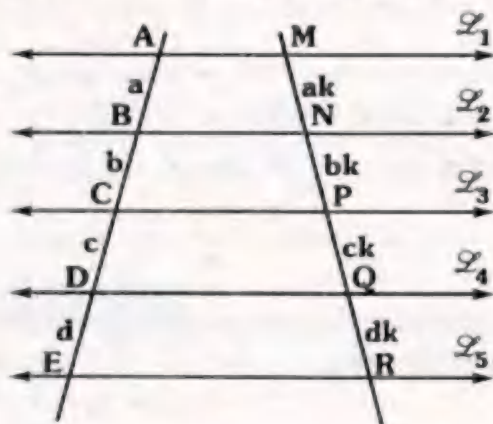
$$DE = c = na \quad \text{y}$$

$$EF = d = nb$$

$$\therefore \boxed{\frac{c}{d} = \frac{a}{b}}$$

### Observaciones

- Si son más de tres paralelas, se puede plantear así:



Si:  $\vec{Q}_1 \parallel \vec{Q}_2 \parallel \vec{Q}_3 \parallel \vec{Q}_4 \parallel \vec{Q}_5$

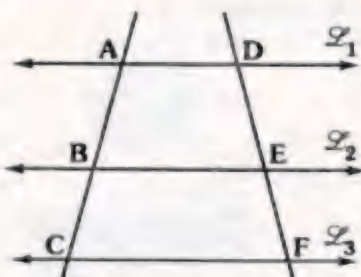
Se cumple:

$$\boxed{\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CD}{PQ} = \frac{DE}{QR}}$$

También:

$$\boxed{\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{PQ}}$$

- En el gráfico:



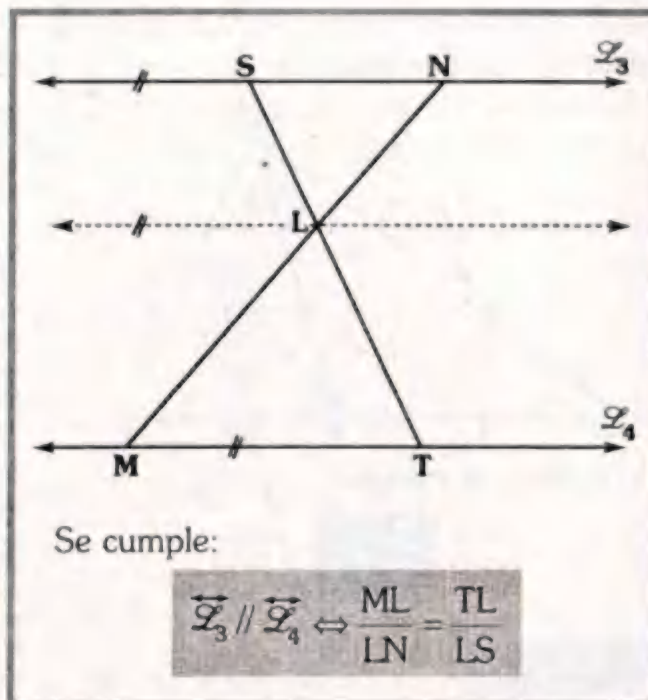
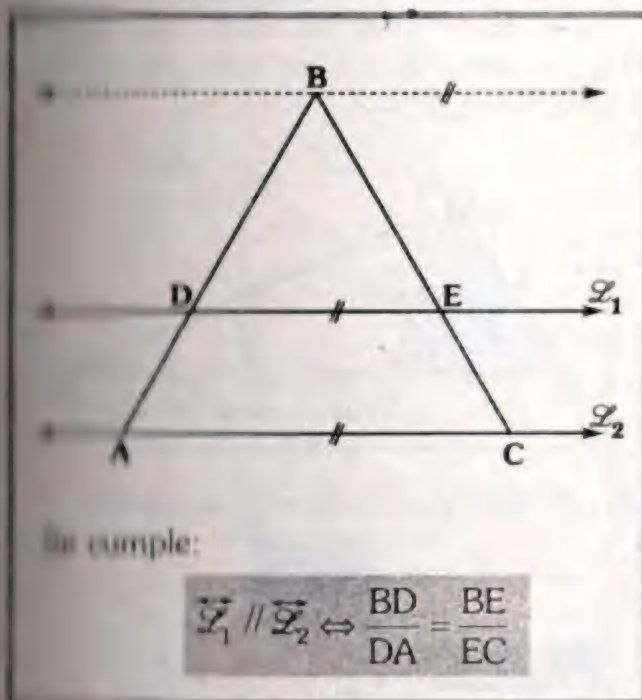
Si:  $\vec{Q}_1 \parallel \vec{Q}_2$  y  $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \Rightarrow \vec{Q}_3 \parallel \vec{Q}_1$

La prueba es sencilla suponiendo que  $\vec{Q}_3$  no es paralela a  $\vec{Q}_1$ .

- En el gráfico anterior, si  $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$  entonces "**no necesariamente**" se cumple que  $\vec{Q}_1 \parallel \vec{Q}_2 \parallel \vec{Q}_3$ . Es decir el teorema de Tales no es recíproco sino como en el caso anterior, se llama "RECÍPROCO PARCIAL".

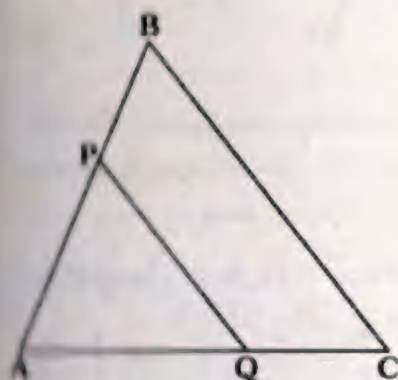
# COROLARIOS DEL TEOREMA DE TALES

Es decir casos particulares del teorema; veamos:

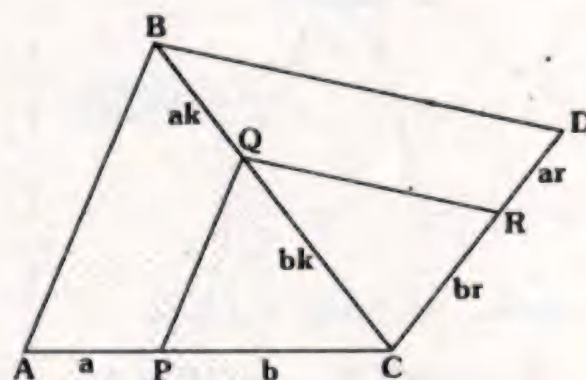


*Nota*

No perder de vista que los corolarios son recíprocos y aplicables al triángulo en cualquier ubicación, por ejemplo:



$$\begin{aligned} \text{Si: } & \overline{PQ} \parallel \overline{BC} \\ \Rightarrow & \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QC} \end{aligned}$$

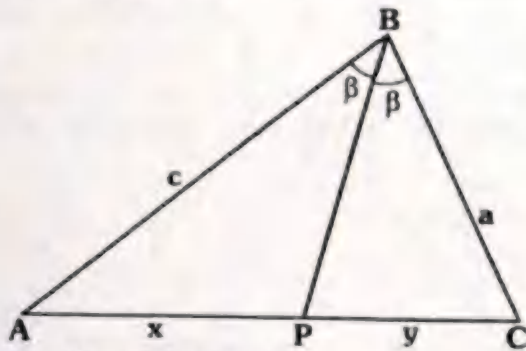


$$\begin{aligned} \text{Si: } & \overline{AB} \parallel \overline{PQ} \text{ y } \overline{QR} \parallel \overline{BD} \\ \Rightarrow & \frac{AP}{PC} = \frac{DR}{RC} \end{aligned}$$



### TEOREMA DE LA BISECTRIZ INTERIOR

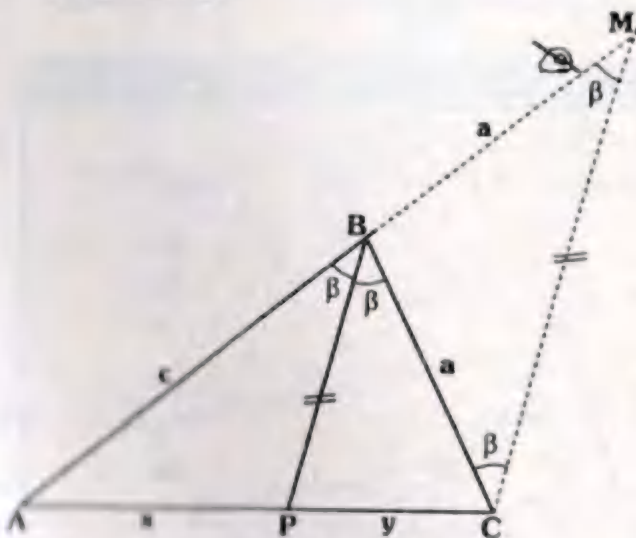
En todo triángulo la bisectriz interior, divide internamente al lado al cual es relativo en dos segmentos proporcionales a los lados adyacentes a dicha bisectriz.



En el gráfico, se cumple:

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{a}$$

**Prueba**



– Prolongamos  $\overline{AB}$  hasta M talque:

$$PB \parallel CM \Rightarrow m\angle BCM = m\angle CMB = \beta$$

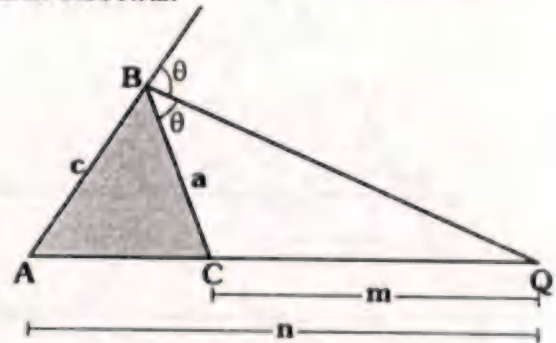
$$\Rightarrow BC = BM = a$$

– Por corolario del teorema de Tales:

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{a}$$

### TEOREMA DE LA BISECTRIZ EXTERIOR

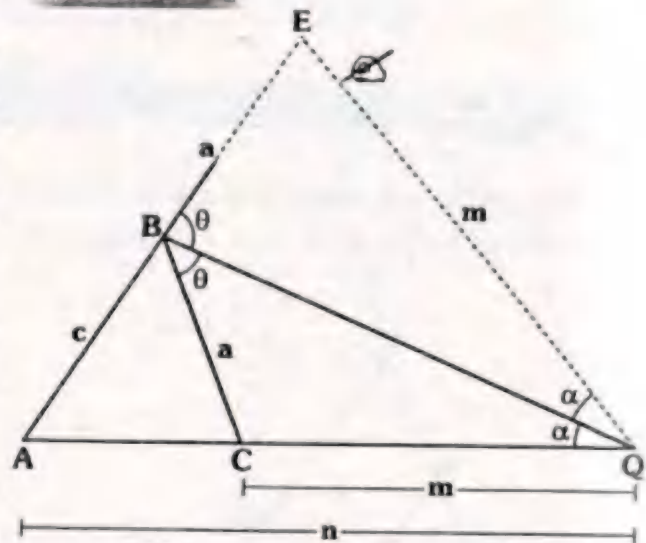
En todo triángulo, la bisectriz exterior (con los lados adyacentes de diferente longitud) divide externamente al lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados adyacentes a dicha bisectriz.



En el gráfico,  $a \neq c$  ( $c > a$ ), se cumple:

$$\frac{n}{m} = \frac{c}{a}$$

**Prueba**



– Ubicamos E en la prolongación de  $\overline{AB}$  talque:  $CB = BE = a$

$$\Rightarrow \triangle CBQ \cong \triangle EBQ \text{ (LAL)}$$

$$\text{luego: } CQ = QE = m \quad y$$

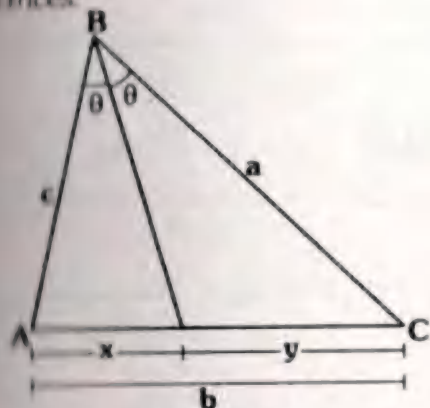
$$m\angle AQB = m\angle BQE = \alpha$$

– Por teorema de la bisectriz interior, en el

$$\triangle AEQ: \frac{n}{m} = \frac{c}{a}$$

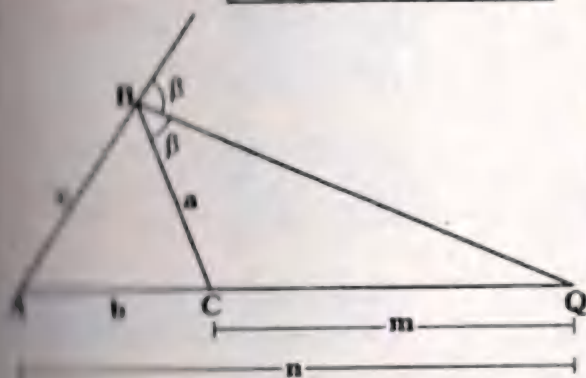
### Observaciones

Como consecuencia de lo anterior podemos calcular en función de los lados, cada uno de los segmentos determinados por las bisectrices:



Se cumple:

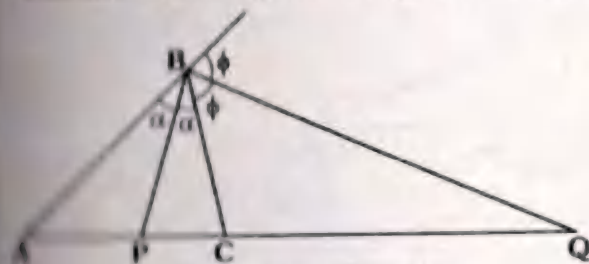
$$x = \frac{cb}{a+c} ; y = \frac{ab}{a+c}$$



Se cumple:

$$n = \frac{cb}{c-a} ; m = \frac{ab}{c-a}$$

Como conclusión del teorema de la bisectriz interior y exterior, tendremos:



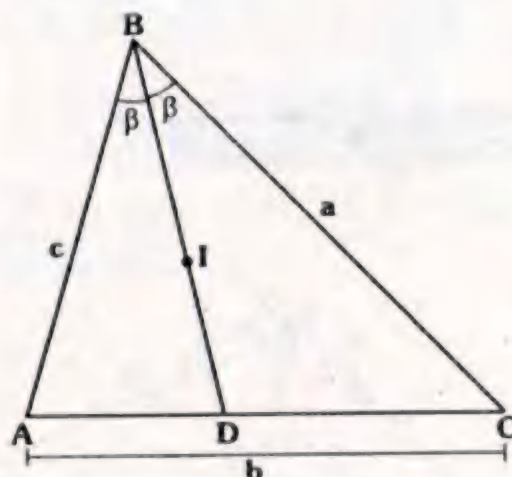
Se cumple:

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{QC}$$

Esta relación se denomina CUATERNA ARMÓNICA, de la cual analizaremos más adelante.

### TEOREMA DEL INCENTRO

En todo triángulo el incentro divide internamente a una bisectriz interior (la razón es del mayor y menor segmento) en segmentos proporcionales a la suma de longitudes de los lados adyacentes a la bisectriz y la longitud del tercer lado.

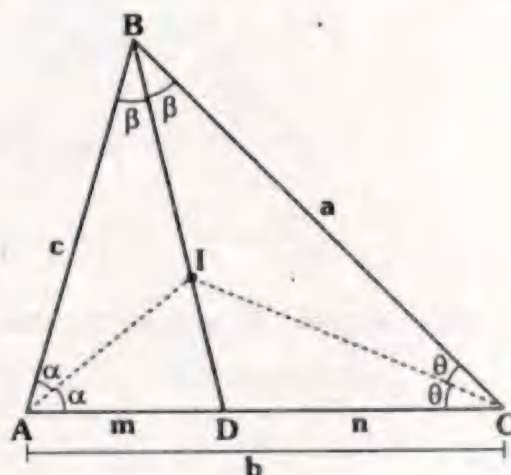


En el gráfico, I es incentro del  $\triangle ABC$ .

Se cumple:

$$\frac{BI}{ID} = \frac{a+c}{b}$$

### Prueba





$$\frac{BI}{ID} = \frac{c}{m} = \frac{a}{n} \Rightarrow \frac{BI}{ID} = \frac{c+a}{m+n} \therefore \frac{BI}{ID} = \frac{a+c}{b}$$

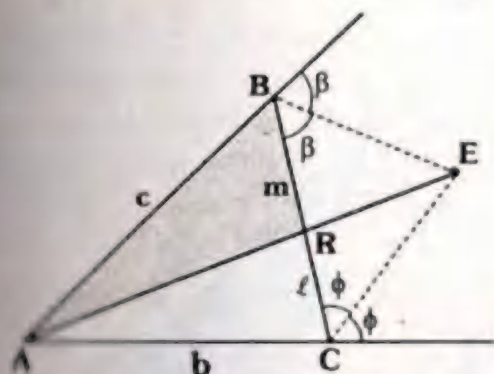
Como:  $b < a + c \Rightarrow 1 < \frac{a+c}{b} \Rightarrow 1 < \frac{BI}{ID} \therefore ID < BI$

$$\frac{BE}{EM} = \frac{c-a}{b}$$

$$\frac{AE}{ER} = \frac{c+b}{a}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{c}{n} = \frac{a}{m} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{c-a}{n-m} ; \text{ como } n-m=b \quad \therefore \frac{x}{y} = \frac{c-a}{b}$$

Demostremos ahora la segunda expresión:

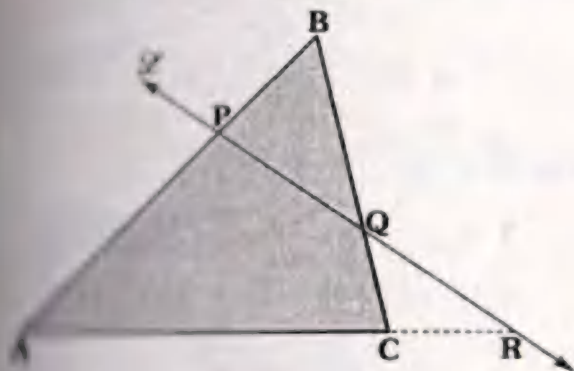


En los triángulos ABR y ACR por teorema de la bisectriz exterior:

$$\begin{aligned} \frac{AE}{ER} &= \frac{c}{m} = \frac{b}{\ell} \\ \Rightarrow \frac{AE}{ER} &= \frac{c+b}{m+\ell} \\ \therefore \frac{AE}{ER} &= \frac{c+b}{a} \end{aligned}$$

### TEOREMA DE MENELAO

Toda recta secante a dos lados de un triángulo y a la prolongación del tercer lado, determinan seis segmentos, cumpliéndose que el producto de las longitudes de tres de ellos sin extremo común es igual al producto de las longitudes de las otras tres.



En el gráfico,  $\mathcal{L}$  es la recta secante o transversal al  $\triangle ABC$ .

Los seis segmentos determinados son:

$$\overline{AP}, \overline{PB}, \overline{BQ}, \overline{QC}, \overline{CR} \text{ y } \overline{RA}$$

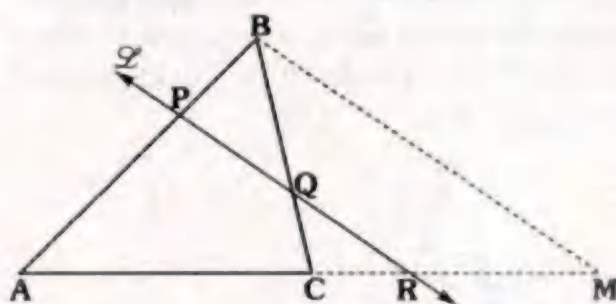
Se cumple:

$$(\overline{AP})(\overline{BQ})(\overline{CR}) = (\overline{PB})(\overline{QC})(\overline{RA})$$

o equivalentemente:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{RA}} = 1$$

**Prueba**



Se traza  $\overline{BM} \parallel \mathcal{L}$  ( $M \in \overline{AR}$ )

Por teorema de Tales en:

$$\triangle ABM: \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{RM}} \quad \dots (I)$$

$$\triangle BCM: \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{MR}}{\overline{RC}} \quad \dots (II)$$

De (I) y (II):

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} &= \frac{\overline{AR}}{\overline{RM}} \cdot \frac{\overline{MR}}{\overline{RC}} \\ \Rightarrow \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{AR}} &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore (\overline{AP})(\overline{BQ})(\overline{CR}) = (\overline{PB})(\overline{QC})(\overline{RA})$$

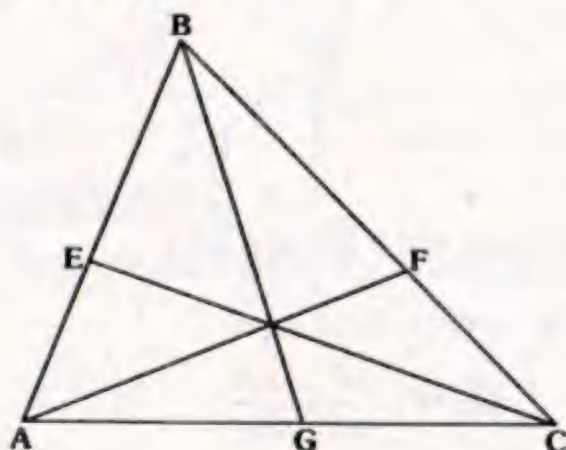


**Nota**

- Como se indicó en un inicio, estamos considerando sólo la longitud o normas de los segmentos (no segmentos dirigidos).
- Más adelante estudiaremos otro caso del teorema de Menelao para la recta exterior, los recíprocos y su generalización para los polígonos.

**TEOREMA DE CEVA**

En un triángulo al trazar tres cevianas concurrentes, determinan en cada lado segmentos, cumpliéndose que el producto de las longitudes de tres de ellos, sin extremos comunes, es igual al producto de las longitudes de los otros tres.



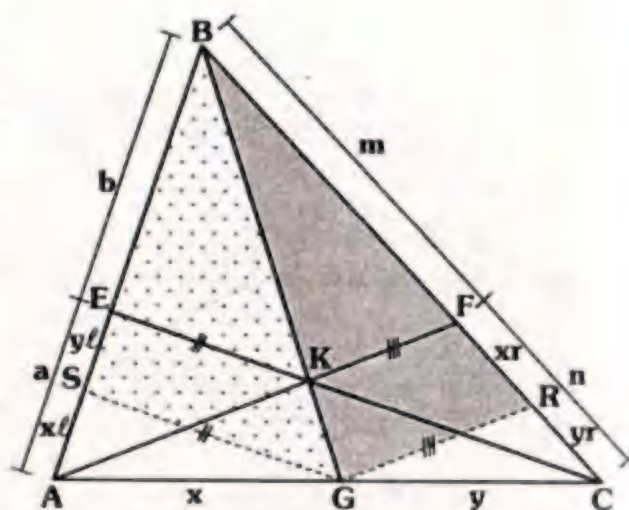
- En el gráfico,  $\overline{AF}$ ,  $\overline{CE}$  y  $\overline{BG}$  son cevianas concurrentes.
- Los seis segmentos son:  $\overline{AE}$ ,  $\overline{EB}$ ,  $\overline{BF}$ ,  $\overline{FC}$ ,  $\overline{CG}$  y  $\overline{GA}$ .

Se cumple:

$$(\overline{AE})(\overline{BF})(\overline{CG}) = (\overline{EB})(\overline{FC})(\overline{GA})$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} \cdot \frac{\overline{BF}}{\overline{FC}} \cdot \frac{\overline{CG}}{\overline{GA}} = 1$$

**Prueba**



- Se ubica "S" en  $\overline{AE}$  y "R" en  $\overline{FC}$  tal que  $\overline{GS} \parallel \overline{KE}$  y  $\overline{GR} \parallel \overline{KF}$ , por teorema de Tales:

$$\frac{b}{yl} = \frac{BK}{KG} = \frac{m}{xr}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{yl} = \frac{m}{xr}$$

$$\Rightarrow \frac{bx}{my} = \frac{l}{r} \quad \dots (I)$$

- Como:  $a = (x+y)l$  y  $n = (x+y)r$

$$\Rightarrow \frac{a}{n} = \frac{l}{r} \quad \dots (II)$$

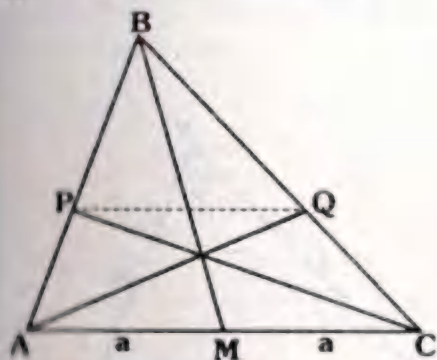
- De (I) y (II):

$$\frac{bx}{my} = \frac{a}{n}$$

$$\therefore nbx = amy$$

### Observación

- Más adelante estudiaremos el teorema de Ceva para dos cevianas exteriores y una interior, así como el recíproco.
- Veamos que ocurre si una ceviana es mediana.



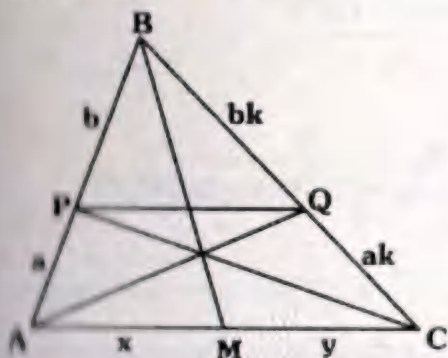
$$\text{Si } AM=MC \Rightarrow \overline{PQ} \parallel \overline{AC}$$

### Prueba

Por teorema de Ceva:

$$\begin{aligned} (AP)(BQ)a &= (PB)(QC)a \\ \Rightarrow \frac{AP}{PB} &= \frac{BQ}{QC} \quad \therefore \overline{PQ} \parallel \overline{AC} \end{aligned}$$

También:

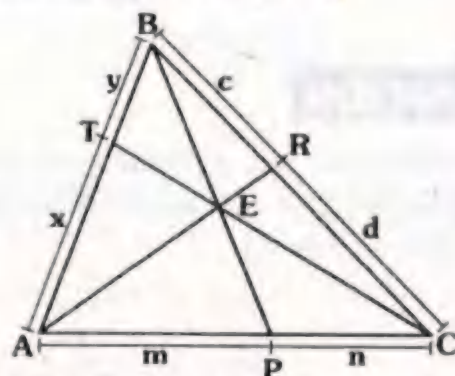


$$\text{Si } \overline{PQ} \parallel \overline{AC} \Rightarrow AM=MC$$

### Prueba

Por teorema de Ceva:  $xbak=yabk$   
 $\Rightarrow x=y$

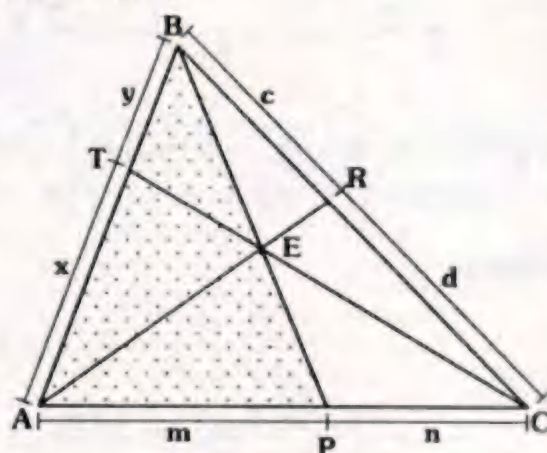
### TEOREMA DE VAN AUBEL



En el gráfico, se cumple:

$$\frac{AE}{ER} = \frac{x}{y} + \frac{m}{n}; \quad \frac{BE}{EP} = \frac{y}{x} + \frac{c}{d}; \quad \frac{CE}{ET} = \frac{n}{m} + \frac{d}{c}$$

### Prueba



Usemos el teorema de Menelao:

– En  $\triangle ABP$ :  $x(BE)n = y(EP)(m+n)$

$$\Rightarrow \frac{n}{m+n} = \frac{y(EP)}{x(BE)} \quad \dots (I)$$

– En  $\triangle PBC$ :  $\frac{m}{m+n} = \frac{c(EP)}{d(BE)} \quad \dots (II)$

– Sumando (I) y (II):

$$\frac{n}{m+n} + \frac{m}{m+n} = \frac{y(EP)}{x(BE)} + \frac{c(EP)}{d(BE)}$$

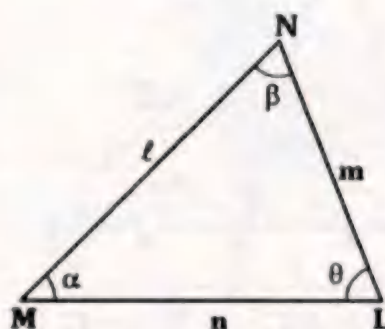
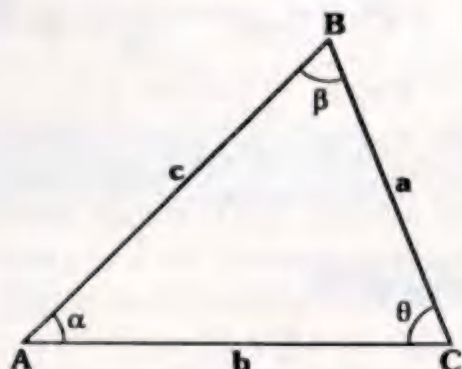
$$\Rightarrow 1 = \frac{EP}{BE} \left( \frac{y}{x} + \frac{c}{d} \right) \quad \therefore \frac{BE}{EP} = \frac{y}{x} + \frac{c}{d}$$



## SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

### DEFINICIÓN

Dos triángulos son semejantes si sus tres ángulos internos son de igual medida respectivamente y los lados opuestos a dichos ángulos (*denominados lados homólogos*) son respectivamente proporcionales.



En el gráfico, los ángulos internos del  $\triangle ABC$  y del  $\triangle MNL$  son de igual medida respectivamente y los pares de lados,  $\overline{AB}$  y  $\overline{MN}$ ;  $\overline{AC}$  y  $\overline{ML}$  y  $\overline{BC}$  con  $\overline{NL}$  son lados homólogos.

### Notación

$$\triangle ABC \sim \triangle MNL$$

"Se lee: el  $\triangle ABC$  es semejante con el  $\triangle MNL$ ."

Se cumple:

$$\frac{a}{m} = \frac{c}{l} = \frac{b}{n} = k$$

k: constante de semejanza ( $k > 0$ )

### Observaciones

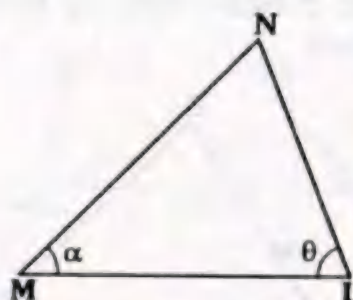
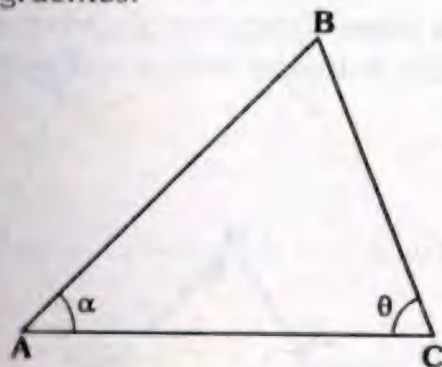
- En los ejercicios dependiendo de lo que se quiera calcular se puede poner:  $a = mk$ ,  $c = lk$  y  $b = nk$  o si buscamos productos, se tendrá por ejemplo:  $al = mc$
- En la sección de anexos definimos la semejanza para todas las figuras.
- Si  $k = 1 \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle MNL$

## CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

son condiciones que cumplen dos triángulos para que sean semejantes.

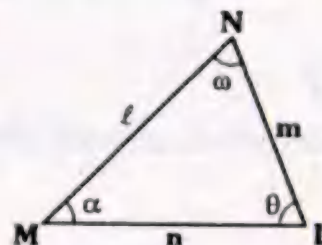
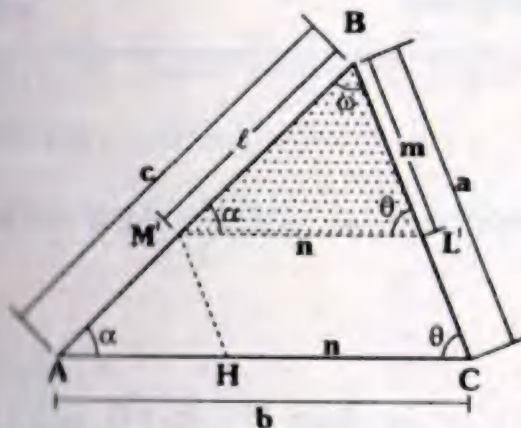
### CRITERIO 1

Dos triángulos son semejantes si tienen dos de sus ángulos respectivamente congruentes:



Se cumple que:

$$\triangle ABC \sim \triangle MNL$$



Es fácil notar que  $m \angle ABC = m \angle MNL$

Si  $\frac{c}{\ell} = 1$  entonces los triángulos son congruentes (caso particular de la semejanza)

Sea  $\frac{c}{\ell} > 1$  entonces se ubica  $M'$  en  $\overline{AB}$  tal que:  $M'B = MN$ , se traza  $\overline{M'L'} \parallel \overline{AC}$

Luego  $\triangle AM'BL' \sim \triangle MNL$

Por teorema de Tales:  $\frac{c}{\ell} = \frac{a}{m}$  ... (I)

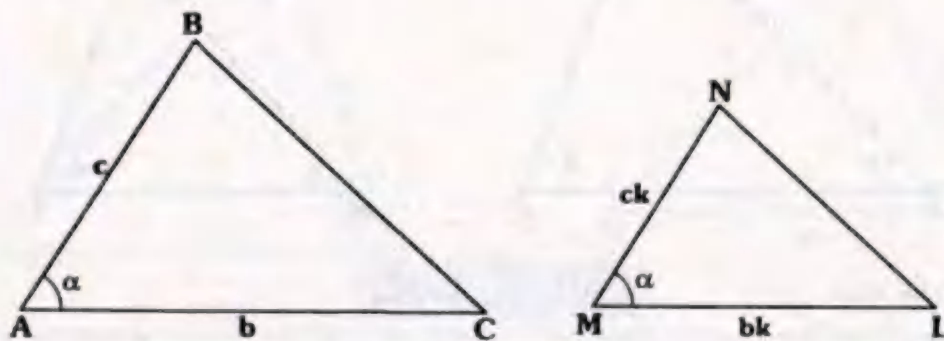
Se traza  $\overline{M'H} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \overline{HM'L'C}$ : paralelogramo, con  $M'L' = HC = n$



- Por teorema de Tales:  $\frac{c}{\ell} = \frac{b}{n}$  ... (II)
- De (I) y (II):  $\frac{c}{\ell} = \frac{a}{m} = \frac{b}{n}$ , lo cual prueba la condición para la semejanza de triángulos.

**CRITERIO 2**

Si dos triángulos tienen un par de lados respectivamente proporcionales y el ángulo comprendido de igual medida, entonces dichos triángulos son semejantes.

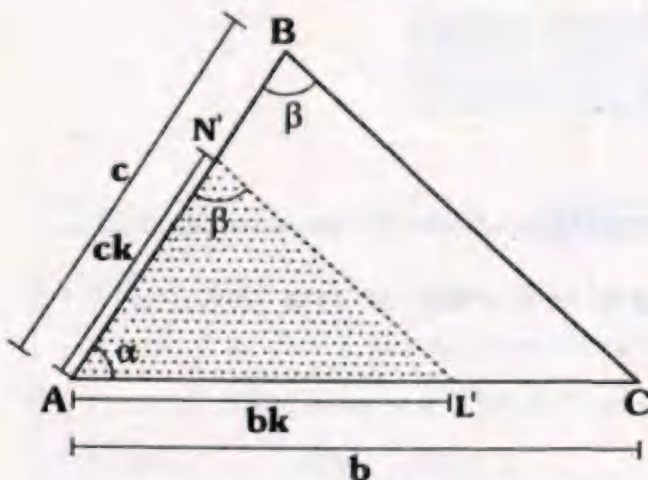


Se cumple:

$$\triangle ABC \sim \triangle MNL$$

**Prueba**

La prueba es similar a la anterior, considerando si:  $k=1 \Rightarrow \triangle ABC \cong \triangle MNL$ , si  $k < 1$  entonces:



- Se ubica  $N'$  en  $\overline{AB}$  y  $L'$  en  $\overline{AC}$  tal que:  $AN' = MN$  y  $AL' = ML$   
 $\Rightarrow \triangle AN'L' \cong \triangle MNL$

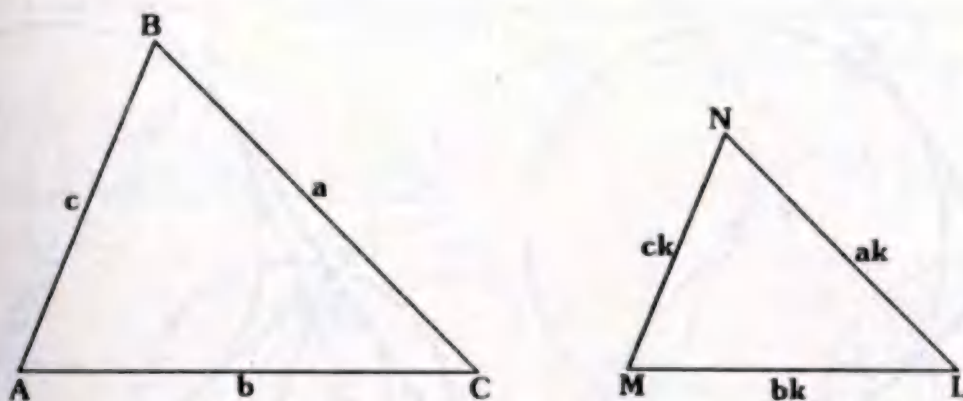
- Por el recíproco del teorema de Tales (1er corolario):

$$\overline{N'L'} \parallel \overline{BC}$$

$$\Rightarrow m\angle AN'L' = m\angle MNL = m\angle ABC$$

**CRITERIO 3**

Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres lados respectivamente proporcionales.

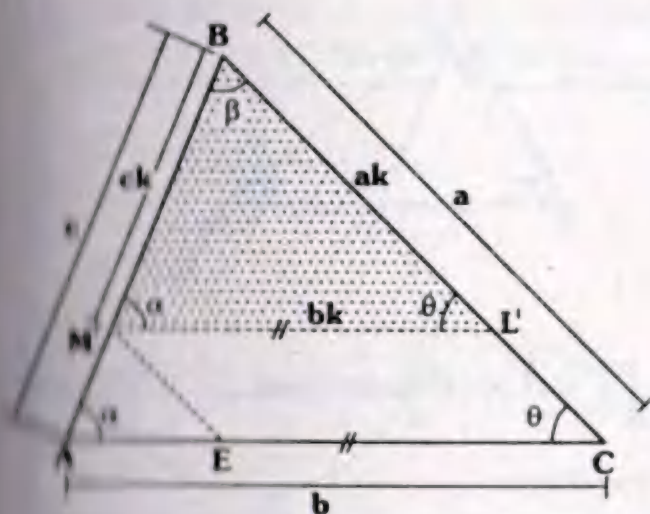


Se cumple:

$$\Delta ABC \sim \Delta MNL$$



- Sólo falta probar que los ángulos son respectivamente congruentes.
- Si  $k=1$  entonces  $\Delta ABC \cong \Delta MNL$
- Si  $k < 1$  entonces se ubica  $M'$  en  $\overline{AB}$  tal que  $MN = M'B$



- Se traza  $\overline{M'L'} \parallel \overline{BC}$ .  
 $\Rightarrow$  Por teorema de Tales:  $BL' = ak$
- Se traza:

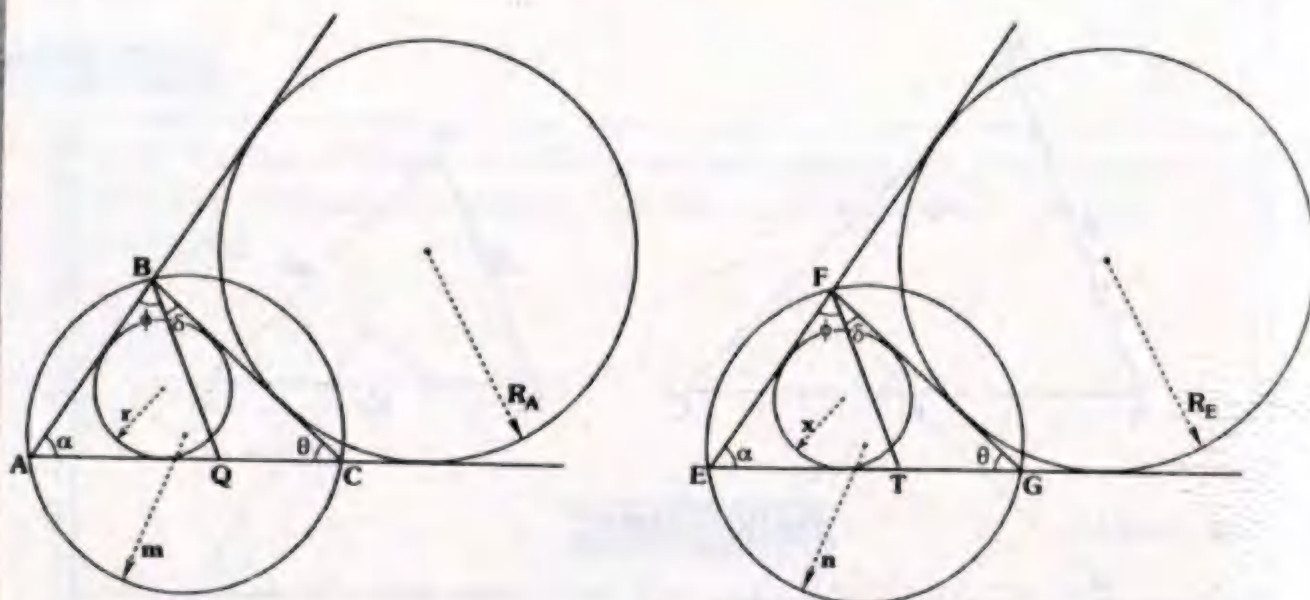
$$\overline{M'E} \parallel \overline{BC} \Rightarrow EC = bk = M'L'$$

- $\Delta M'BL' \cong \Delta MNL$ , ello prueba que los triángulos son respectivamente congruentes (Caso LLL).



**Observación**

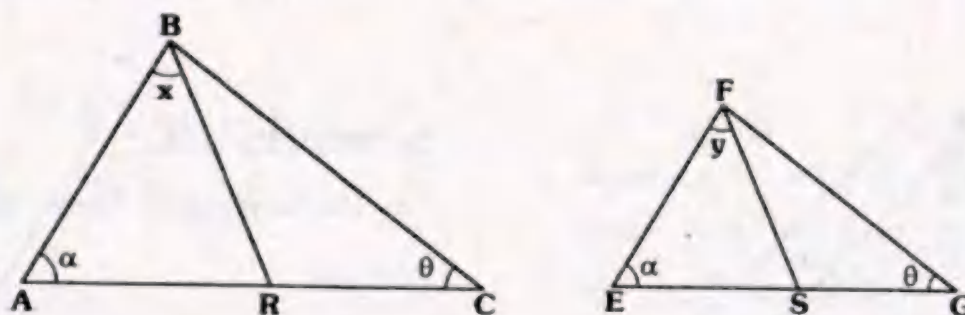
- Si dos triángulos son semejantes, entonces son proporcionales todas las longitudes de sus respectivos elementos homólogos.



En el gráfico,  $\Delta ABC \sim \Delta EFG$  entonces:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{AC}{EG} = \frac{r}{x} = \frac{m}{n} = \frac{R_A}{R_E} = \frac{\text{Perímetro}_{\Delta ABC}}{\text{Perímetro}_{\Delta EFG}} = \frac{AQ}{ET} = \frac{BQ}{FT} = k$$

- En el gráfico,  $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$



Se cumple:

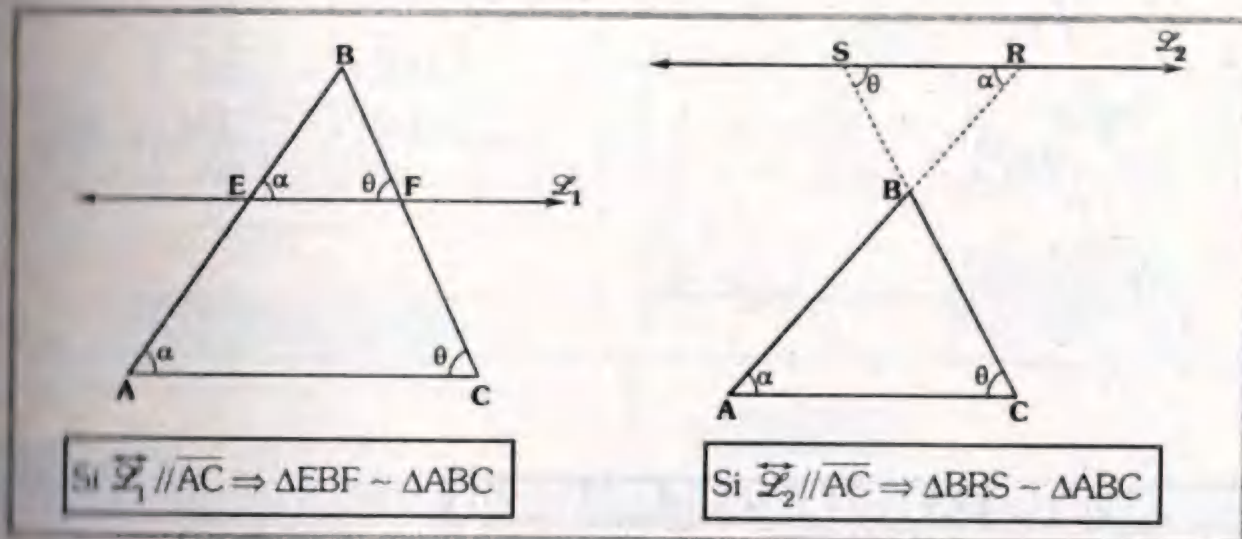
$$\frac{AR}{RC} = \frac{ES}{SG} \Leftrightarrow x = y \quad (\overline{BR} \text{ y } \overline{FS} \text{ son líneas homólogas})$$

Es decir es la manera de reconocer líneas homólogas.

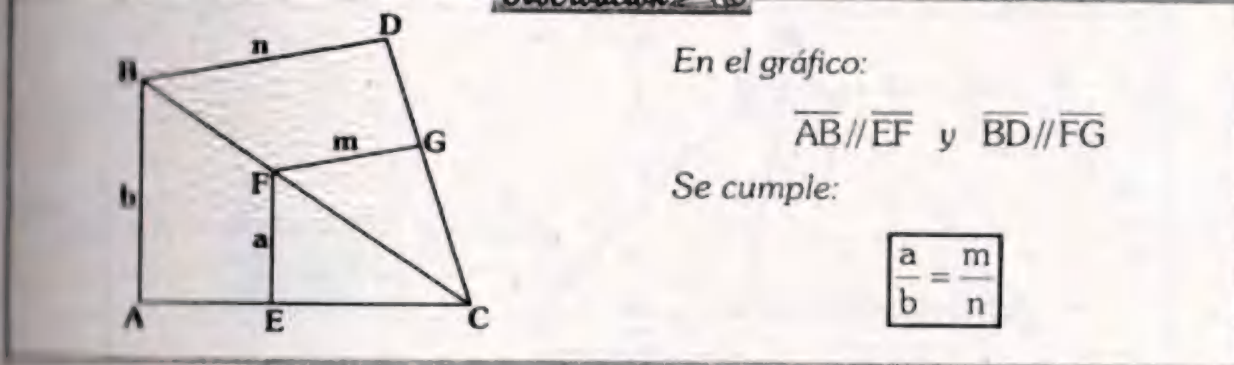
# FIGURAS COMUNES DONDE OBSERVAREMOS LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

En las siguientes figuras veremos situaciones usuales de la semejanza de triángulos:

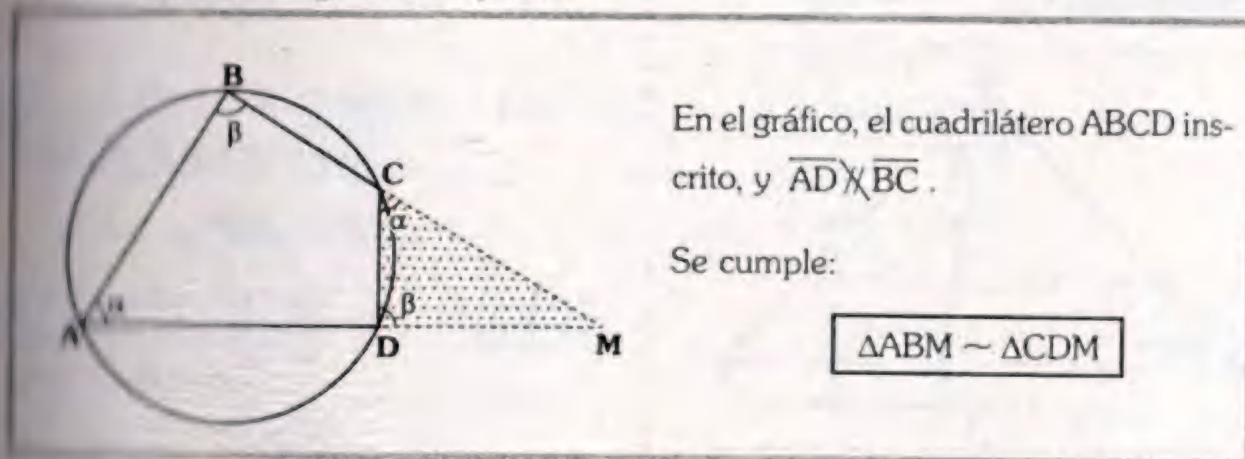
1. Toda recta paralela a un lado de un triángulo, secante a los otros lados o a sus prolongaciones, determinan dos triángulos semejantes.



## Observación

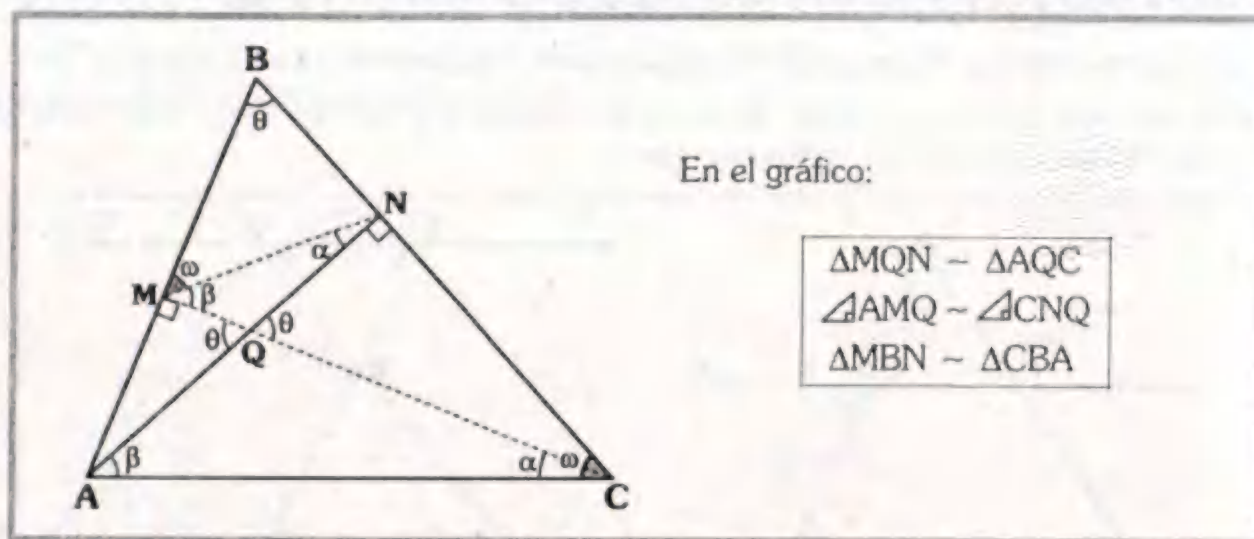


2. Al prolongar los lados opuestos no paralelos de un cuadrilátero inscrito o inscriptible, se determinan dos triángulos semejantes.



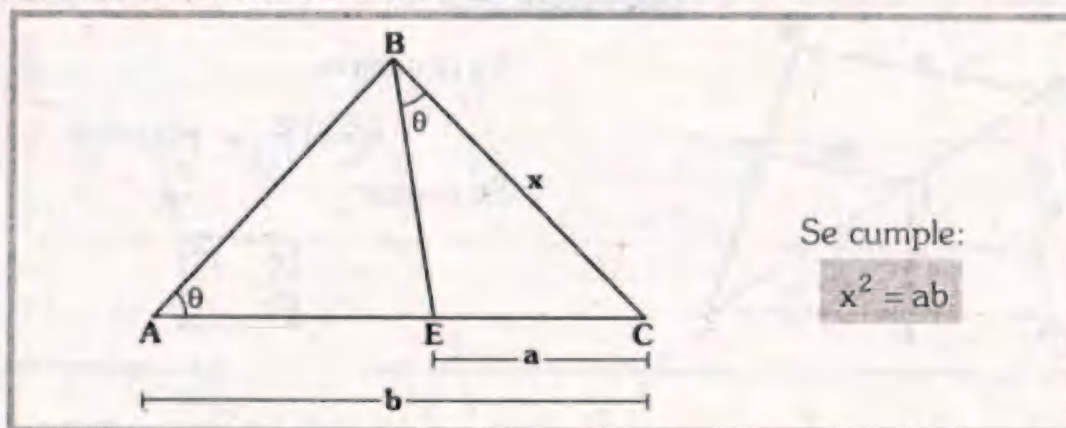


- En un triángulo al trazar dos alturas notaremos varios pares de triángulos semejantes.

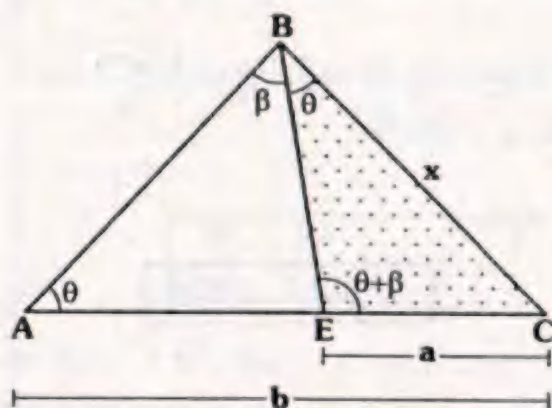


## TEOREMAS SOBRE LA SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

- 1 En el gráfico,  $m\angle BAC = m\angle EBC$



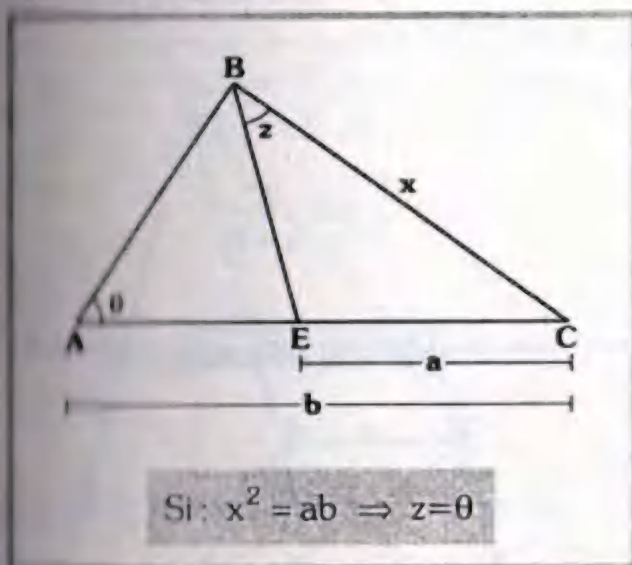
Prueba



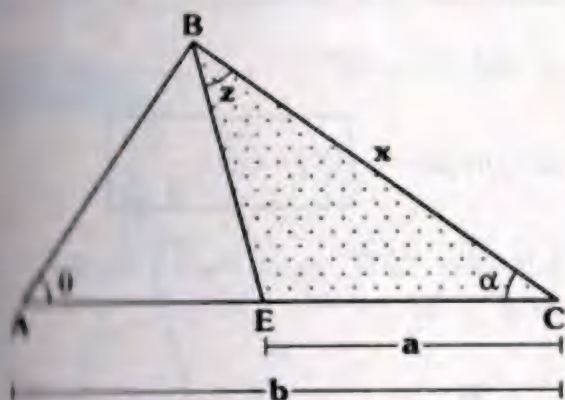
- Sea:  $m\angle ABE = \beta$   
 $\Rightarrow m\angle BEC = m\angle ABC = \theta + \beta$   
 $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle BEC$

- Luego:  $\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$   
 $\therefore x^2 = ab$

Veamos el recíproco del caso anterior:



Prueba



Como:

$$x^2 = ab \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{b}{x}$$

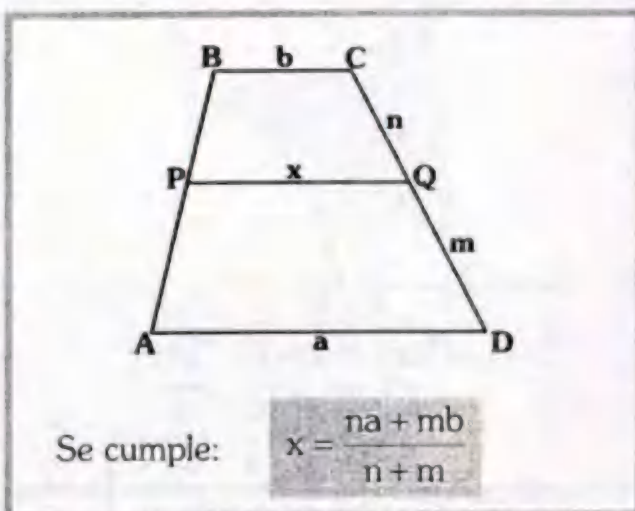
sea  $m \angle ECB = \alpha$ , luego por el segundo caso de la semejanza:

$$\triangle ECB \sim \triangle BCA$$

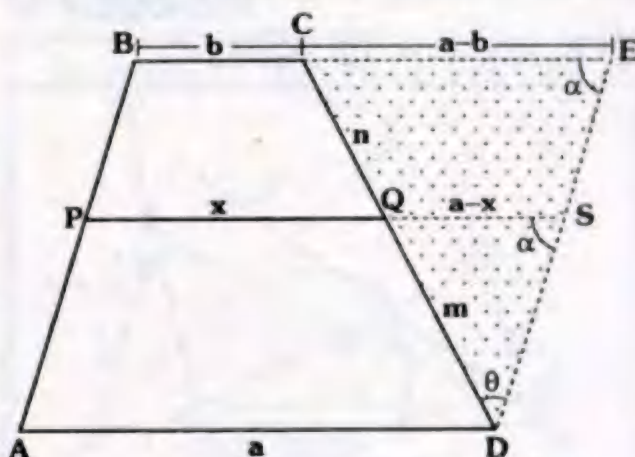
Luego, por la regla: "a lados proporcionales se oponen ángulos iguales" entonces:

$$\theta = z$$

En el gráfico,  $\overline{AD} \parallel \overline{PQ} \parallel \overline{BC}$



Prueba



Se ubica E en la prolongación de  $\overline{BC}$  talque  $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ , se prolonga  $\overline{PQ}$  hasta que corte a  $\overline{DE}$  en S.

$\Rightarrow$  ABED y APSD son paralelogramos

$\triangle DSQ \sim \triangle DEC$

$$\Rightarrow \frac{a-x}{a-b} = \frac{m}{m+n}$$

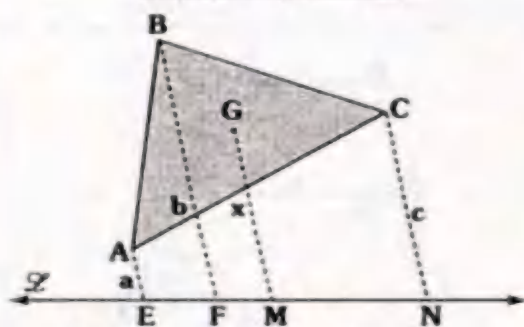
$$\Rightarrow a(m+n) - x(m+n) = m(a-b)$$

$$\Rightarrow am + an - x(m+n) = ma - mb$$

$$\therefore \frac{an+mb}{m+n} = x$$



Observación

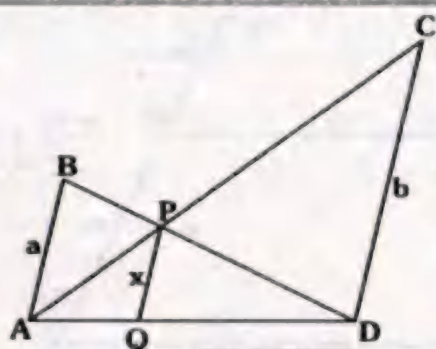


Si  $G$  es baricentro del  $\triangle ABC$   
y  $\overline{EA} \parallel \overline{FB} \parallel \overline{MG} \parallel \overline{NC}$

Se cumple:  $x = \frac{a+b+c}{3}$

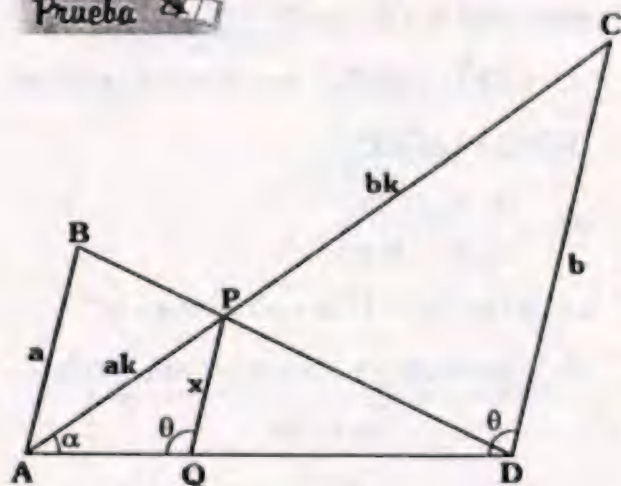
La prueba se deja como ejercicio para el lector.

4 En el gráfico,  $\overline{AB} \parallel \overline{QP} \parallel \overline{DC}$



Se cumple:  $x = \frac{ab}{a+b}$

Prueba



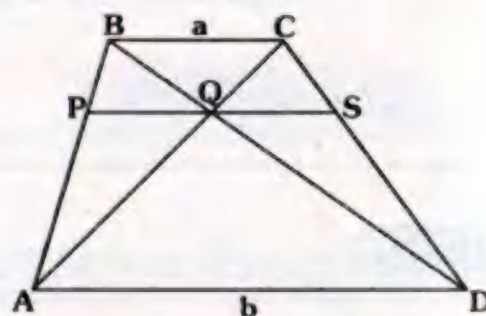
$\triangle ABP \sim \triangle CDP \Rightarrow AP = ak$  y  $PC = bk$

$\triangle AQP \sim \triangle DC$

$\Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{ak}{(a+b)k}$

$\therefore x = \frac{ab}{a+b}$

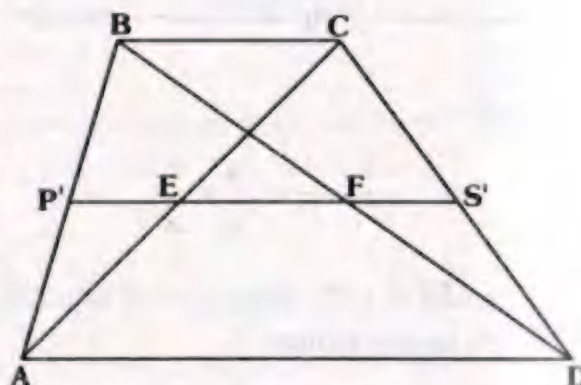
Observación



Si  $\overline{AB} \parallel \overline{PS} \parallel \overline{DC}$

Se cumple:  $PQ = QS = \frac{ab}{a+b}$

Además: "PS" es la media armónica de  $a$  y  $b$ .

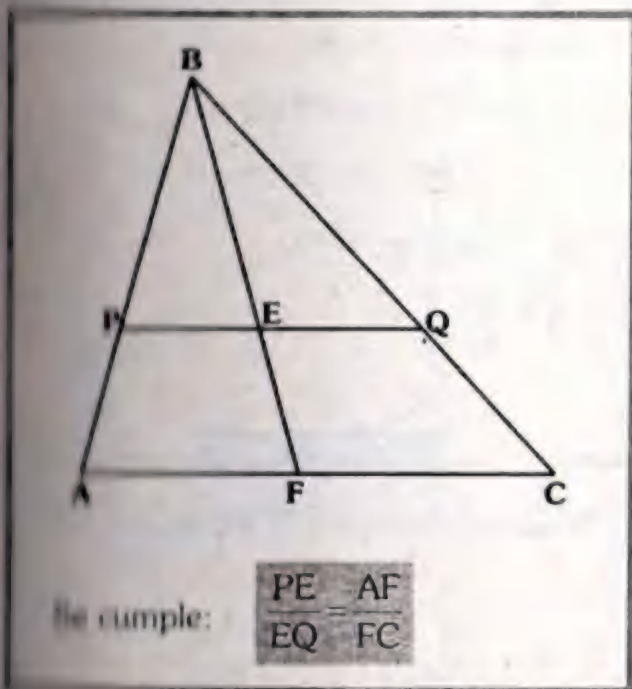


Si:  $\overline{AD} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{P'S'}$

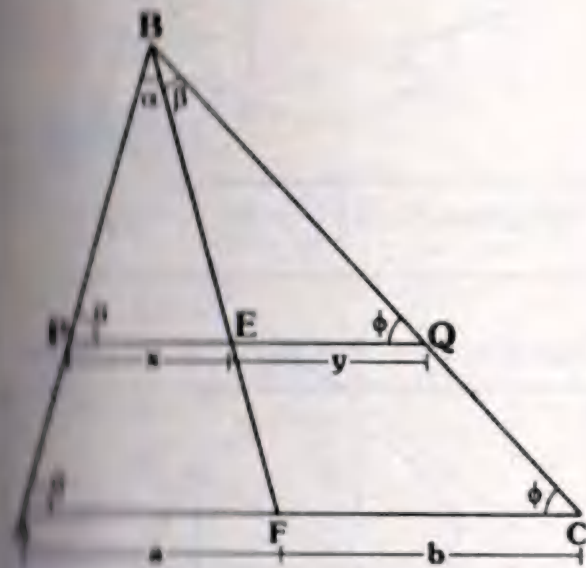
Se cumple:

$P'E = FS'$

En el gráfico,  $\overline{AC} \parallel \overline{PQ}$



**NOTA**

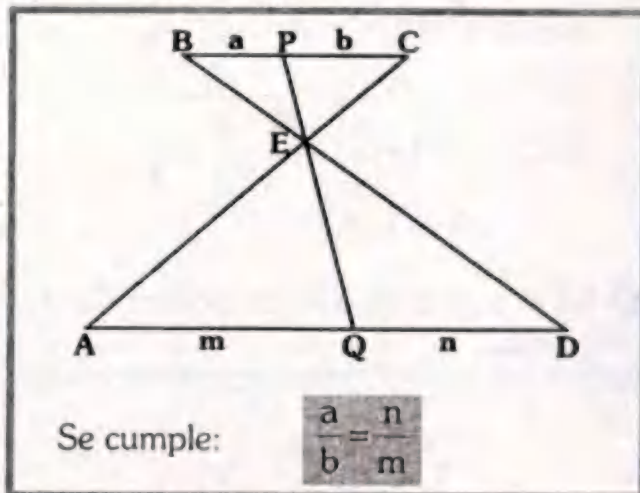


$\triangle ABC \sim \triangle PBQ$

Las líneas  $\overline{BF}$  y  $\overline{BE}$  son homólogos

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

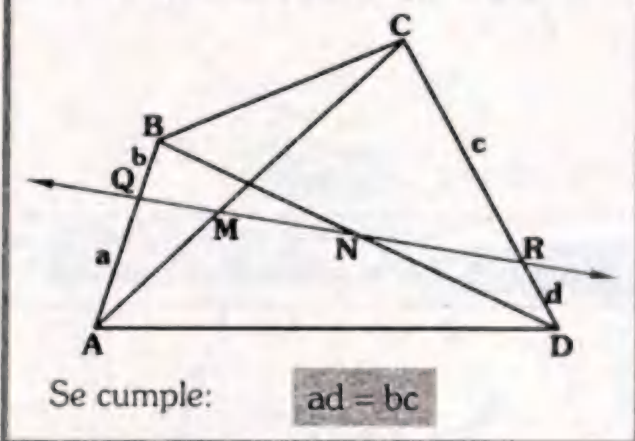
En el gráfico,  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



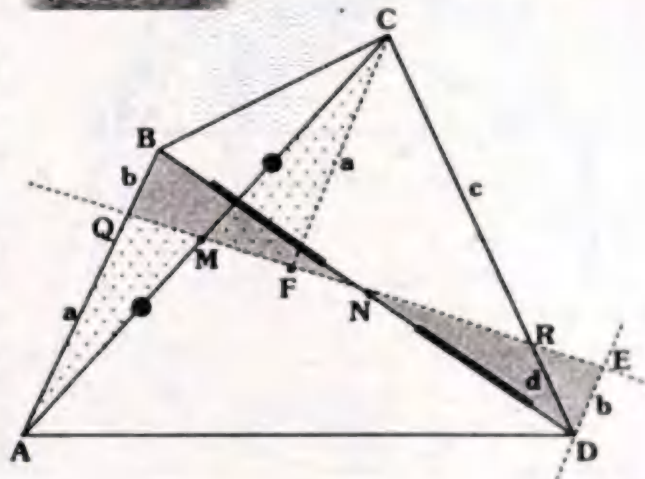
La prueba es análoga a la anterior.

### TEOREMA

En el gráfico,  $AM=MC$  y  $BN=ND$ .



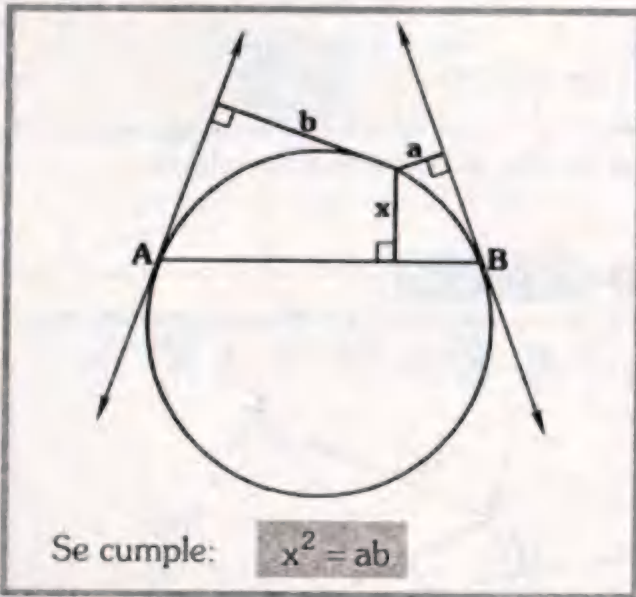
**Prueba**



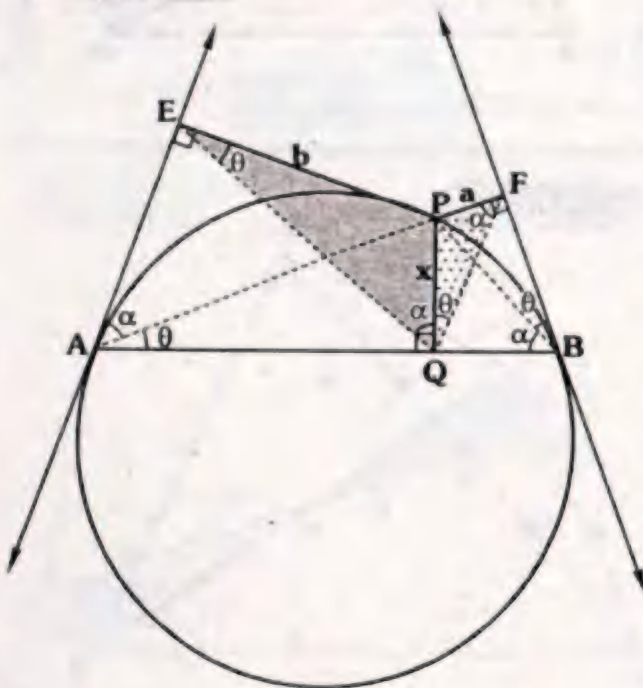


- Por C y D se trazan las paralelas a  $\overline{AB}$ .
  - $\triangle AMQ \cong \triangle CMF \Rightarrow CF = a$
  - $\triangle BNQ \cong \triangle DNE \Rightarrow DE = b$
  - $\triangle FCR \cong \triangle EDR \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
- $\therefore ad = bc$

8 En el gráfico, A y B son puntos de tangencia.



**Prueba**



- Sea  $m\angle PAQ = \theta$  y  $m\angle PAE = \alpha$  y
- Los cuadriláteros AEPQ y QPFB son inscriptibles, luego:

$$m\angle EQP = m\angle PFQ = \alpha \quad y$$

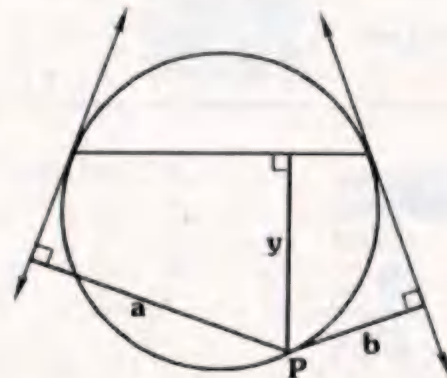
$$m\angle QEP = m\angle PQF = \theta$$

$$\Rightarrow \triangle QPE \sim \triangle FPQ$$

$$\Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{a}{x} \quad \therefore x^2 = ab$$

**Observación**

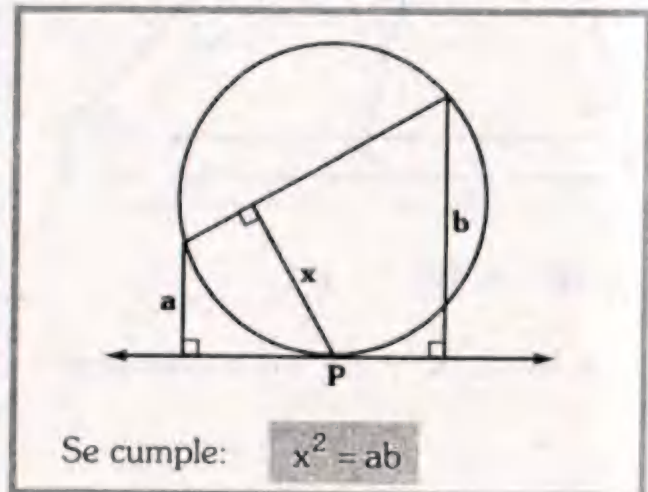
También el teorema es válido en:



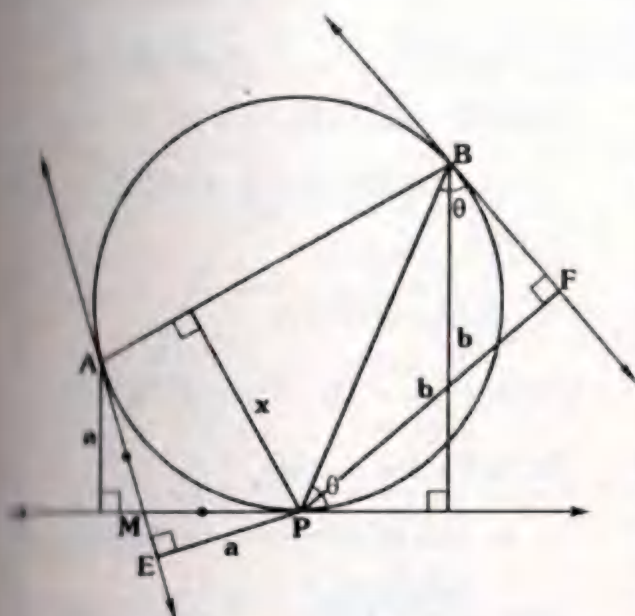
Se cumple:

$$y^2 = ab$$

9 En el gráfico, P es punto de tangencia.



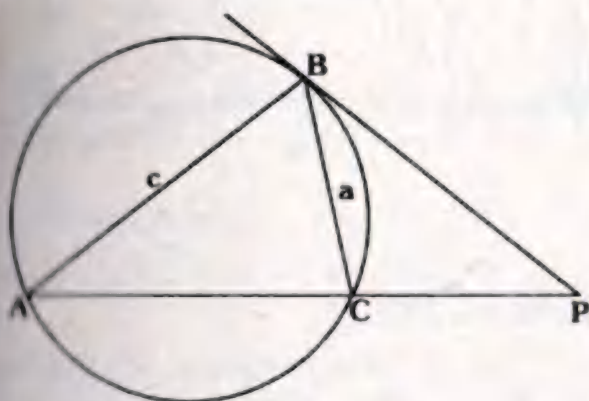
Prueba



- En A y B se trazan las tangentes.
- Luego  $PE = a$  y  $PF = b$ .
- Por la propiedad anterior:  $x^2 = ab$ .

### TEOREMA

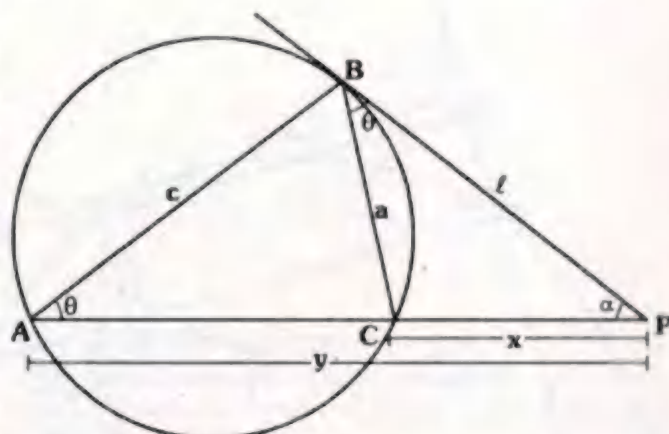
En el gráfico, B es punto de tangencia



Se cumple:

$$\frac{AP}{PC} = \frac{a^2}{c^2}$$

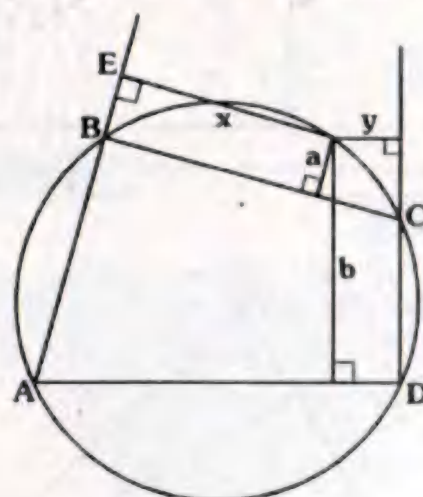
Prueba



- Sea  $m\angle BAC = \theta$   
 $\Rightarrow m\widehat{BC} = 2\theta \Rightarrow m\angle CBP = \theta$
- $\triangle APB \sim \triangle BPC \Rightarrow \frac{x}{\ell} = \frac{a}{y} = \frac{a}{c}$
- Por propiedad de razones y proporciones:

$$\left(\frac{x}{\ell}\right) \cdot \left(\frac{\ell}{y}\right) = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a^2}{c^2}$$

### TEOREMA DE PAPPUS

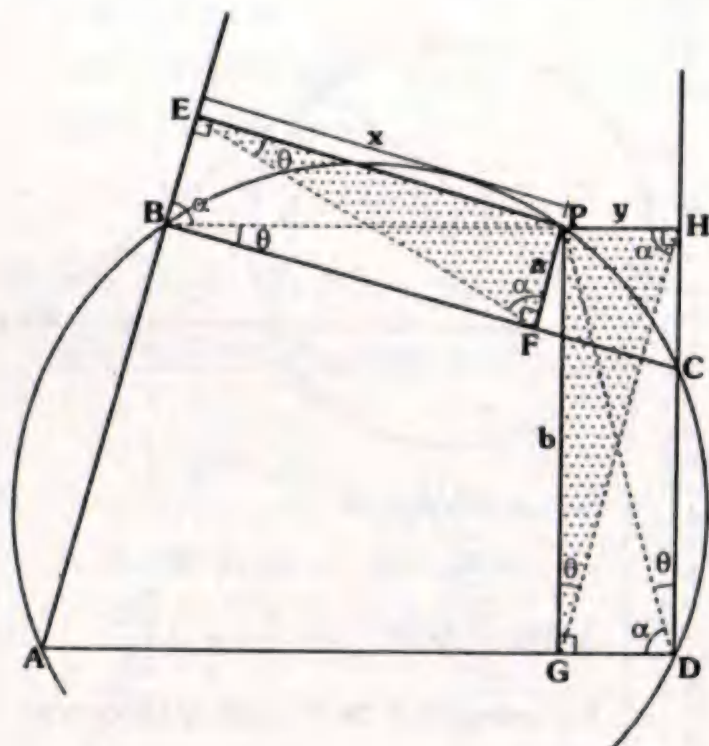


Se cumple:

$$xy = ab$$



Prueba



Sea:  $m\angle PEF = \theta$  y  $m\angle EFP = \alpha$

-  $\triangle BEPF$ : inscriptible

$\Rightarrow m\angle PBF = \theta$  y  $m\angle EBP = \alpha$

-  $\triangle ABPD$ : inscrito

$\Rightarrow m\angle ADP = \alpha$

- Como  $m\widehat{PC} = 2\theta \Rightarrow m\angle PDC = \theta$

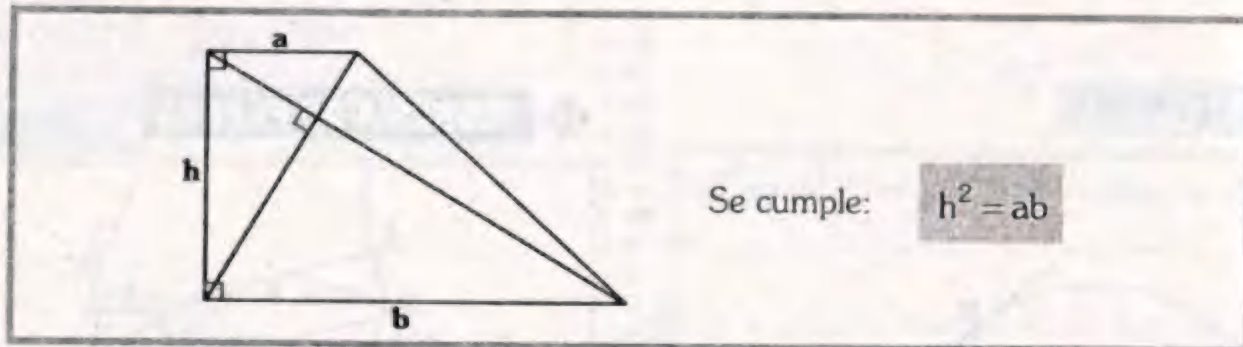
-  $\triangle GPHD$ : inscriptible

$\Rightarrow m\angle PGH = \theta$  y  $m\angle PHG = \alpha$

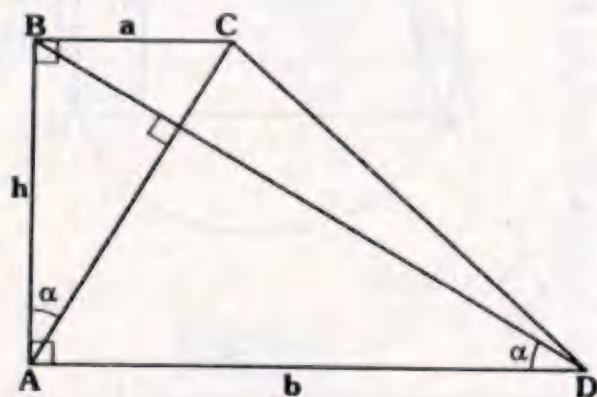
-  $\triangle EPF \sim \triangle GPH \Rightarrow \frac{a}{y} = \frac{x}{b}$

$\therefore xy = ab$

## 12 TEOREMA



Prueba



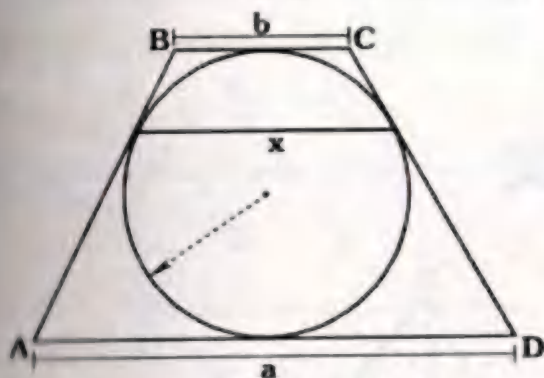
$\triangle DAB \sim \triangle ABC$

$\Rightarrow \frac{h}{b} = \frac{a}{h}$

$\therefore h^2 = ab$

# TEOREMA

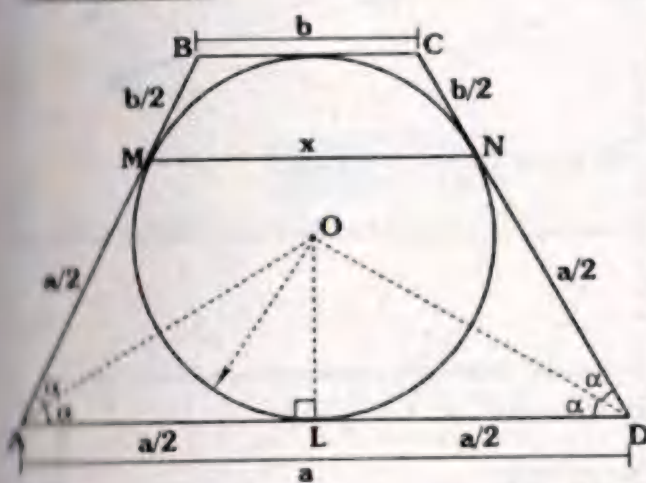
En el gráfico, la circunferencia está inscrita en el trapecio isósceles ABCD. (con  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ )



Se cumple:

$$x = \frac{2ab}{a+b}$$

Prueba



Notemos que :

$$m\widehat{ML} = m\widehat{LN} \Rightarrow \overline{AD} \parallel \overline{MN}$$

$$\triangle AOD : \text{isósceles} \Rightarrow AL = LD = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow AM = ND = \frac{a}{2}$$

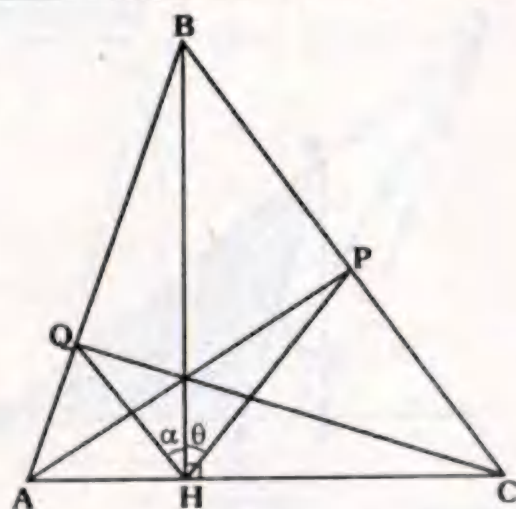
$$\text{Análogamente: } BM = CN = \frac{b}{2}$$

– Por propiedad:

$$x = \frac{a\left(\frac{b}{2}\right) + b\left(\frac{a}{2}\right)}{\frac{a}{2} + \frac{b}{2}}$$

$$\therefore x = \frac{2ab}{a+b}$$

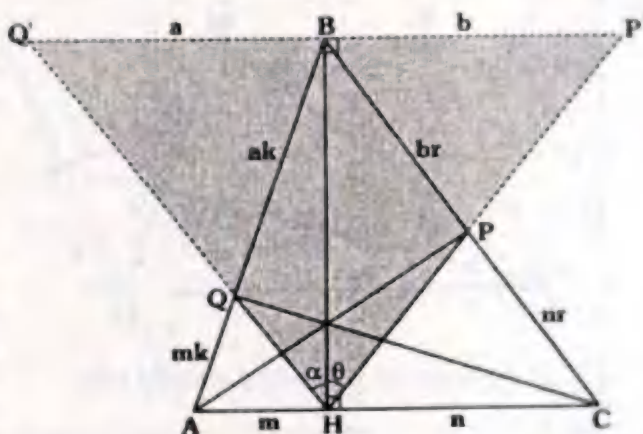
# TEOREMA DE BLANCHET



En el gráfico,  $\overline{BH}$ ,  $\overline{AP}$  y  $\overline{CQ}$  son concurrentes.

Si  $\overline{BH}$  es altura, se cumple:  $\alpha = \theta$

Prueba



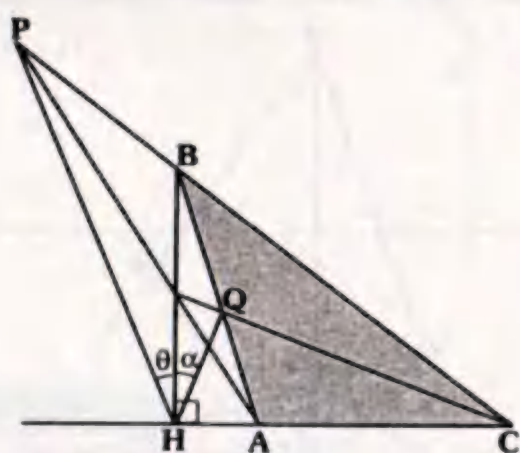


- Por B se traza la paralela a  $\overline{AC}$  la cual es intersecada por las prolongaciones de  $\overline{HQ}$  y  $\overline{HP}$  en  $Q'$  y  $P'$  respectivamente.
- $\Delta AHQ \sim \Delta BQQ'$  y  $\Delta HPC \sim \Delta P'PB \Rightarrow AQ=mk, QB=ak, BP=br$  y  $PC=nr$
- En  $\Delta ABC$ , teorema de Ceva:  $(m)(ak)(nr) = n(br)(mk) \Rightarrow a=b$
- $\Delta HQ'P'$ : isósceles

$$\therefore \alpha = \theta$$

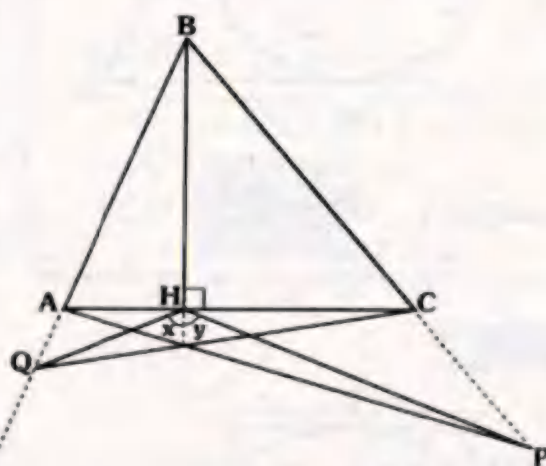
**Observación**

Otras posibilidades del teorema de Blanchet:



Se cumple:

$$\alpha = \theta$$



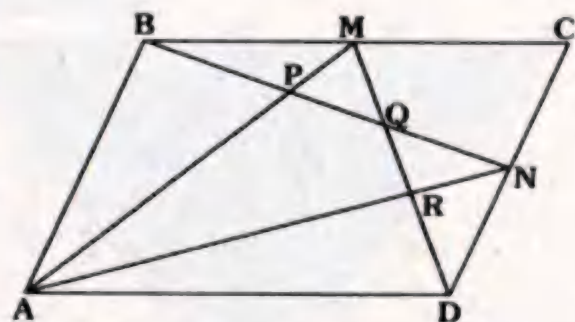
Se cumple:

$$x = y$$

**15 TEOREMA**

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo si  $BM=MC$  y  $CN=ND$ .

Se cumple:



La prueba se deja como ejercicio.

$$AR = 4(RN)$$

$$AP = 4(PM)$$

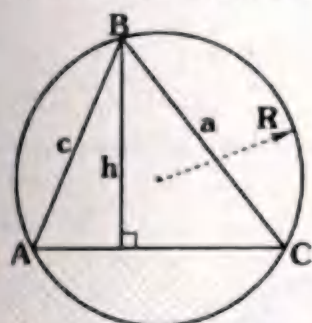
$$\frac{BP}{6} = \frac{PQ}{4} = \frac{QN}{5}$$

$$\frac{DR}{6} = \frac{QR}{4} = \frac{MQ}{5}$$

# Nota

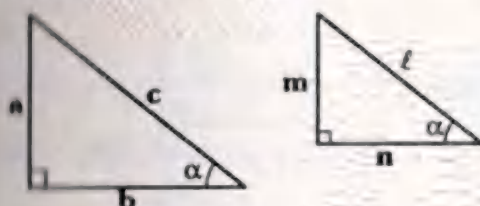
Los siguientes teoremas se profundizaron en la publicación de relaciones métricas que en realidad, aplicaciones de la semejanza, se empleará en algunos problemas.

## TEOREMA DEL PRODUCTO DE LADOS



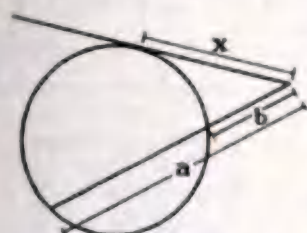
Se cumple:  $ac = h(2R)$

## TEOREMA DE DOSTOR



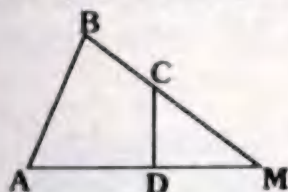
Se cumple:  $am + bn = cl$

## TEOREMA DE LA TANGENTE



Se cumple:  $x^2 = ab$

Si el  $\triangle ABCD$  es inscriptible

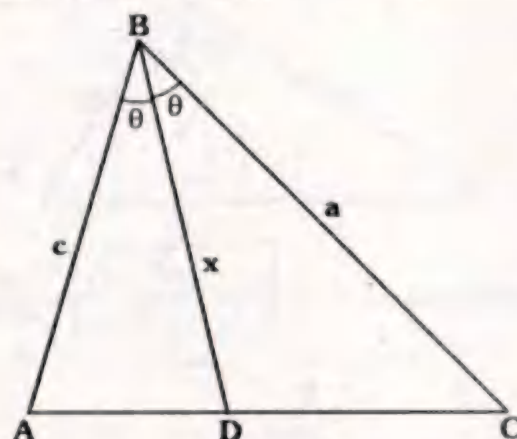


Se cumple:  $(MD)(MA) = (MC)(MB)$

# TEMAS ADICIONALES

En esta parte estudiaremos algunos temas que no se presentan en examen de admisión pero si en concursos interescuelas olimpiadas matemáticas. Analizaremos otros casos, los recíprocos y aplicaciones del teorema de Menelao y Ceva, así como los teoremas de Newton y Desargues y aplicaciones de la división armónica.

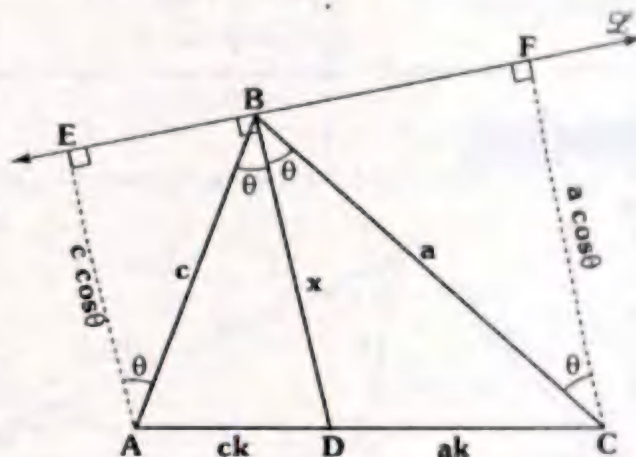
## TEOREMA



En el gráfico,  $\overline{BD}$  es bisectriz interior.

Se cumple:  $x = \frac{2ac}{a+c} \cos \theta$

## Prueba



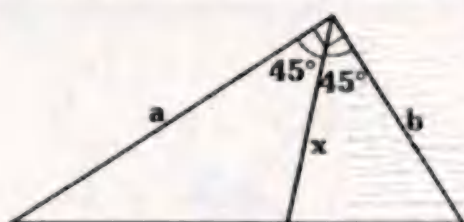


- Se traza la recta  $\mathcal{L}$ , perpendicular a  $\overline{BD}$  en B, luego se traza  $\overline{AE} \perp \mathcal{L}$  y  $\overline{CF} \perp \mathcal{L}$  (E y F en  $\mathcal{L}$ ).
- En  $\triangle AEB$ :  $AE = c \cos \theta$
- En  $\triangle CFB$ :  $FC = a \cos \theta$
- En  $\square AEFC$ , por propiedad:

$$x = \frac{(c \cos \theta)ak + (a \cos \theta)ck}{ck + ak} \quad \therefore x = \frac{2ac \cos \theta}{a + c}$$

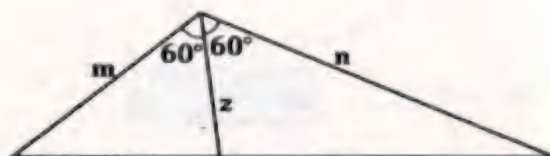
### Observaciones

Veamos casos particulares del último teorema:



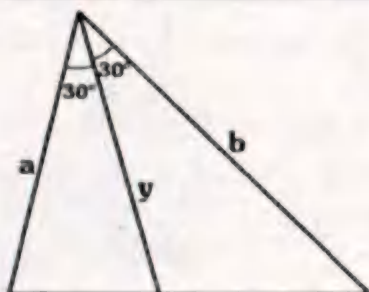
Se cumple:

$$x = \frac{ab}{a+b} \sqrt{2}$$



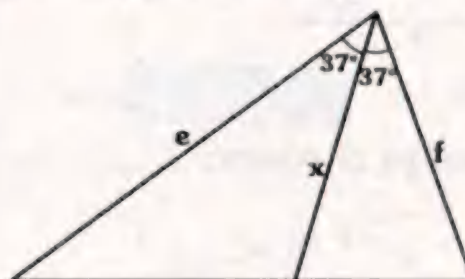
Se cumple:

$$z = \frac{mn}{m+n}$$



Se cumple:

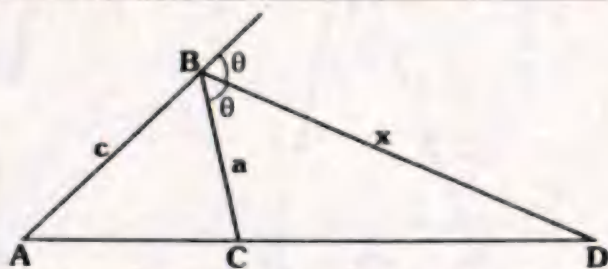
$$y = \frac{ab}{a+b} \sqrt{3}$$



Se cumple:

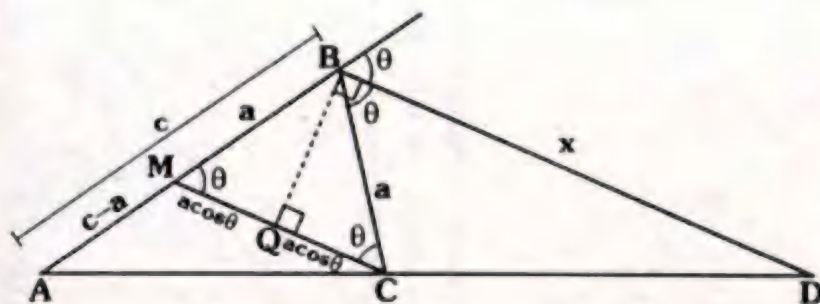
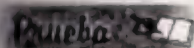
$$x = \frac{8}{5} \left( \frac{ef}{e+f} \right)$$

### TEOREMA



En el gráfico,  $\overline{BD}$  es bisectriz exterior.  
Se cumple:

$$x = \frac{2ac}{c-a} \cos \theta$$



Como  $c > a$ , se ubica M en  $\overline{AB}$  tal que  $\overline{CM} \parallel \overline{BD} \Rightarrow \triangle MBC$ : isósceles ( $MB = MC$ )

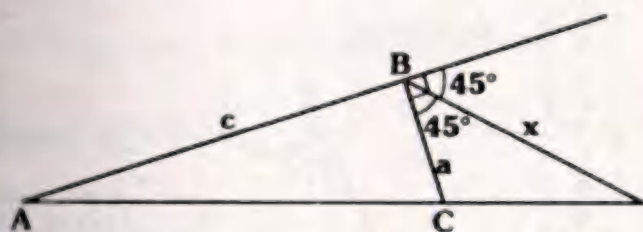
$MC = 2a \cos \theta$

Notemos que:  $\triangle ABD \sim \triangle AMC \Rightarrow \frac{x}{2a \cos \theta} = \frac{c}{c - a}$

$$\therefore x = \frac{2ac}{c - a} \cos \theta$$

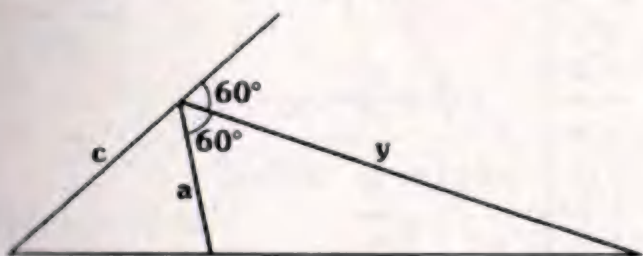
### Observaciones

Casos particulares del teorema:



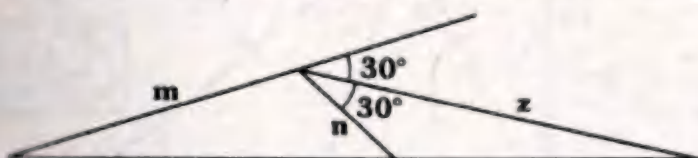
Se cumple:

$$x = \frac{ac}{c - a} \cdot \sqrt{2}$$



Se cumple:

$$y = \frac{ac}{c - a}$$

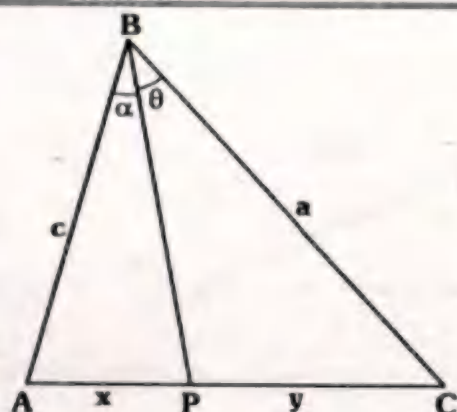


Se cumple:

$$z = \frac{mn}{m - n} \sqrt{3}$$



TEOREMA



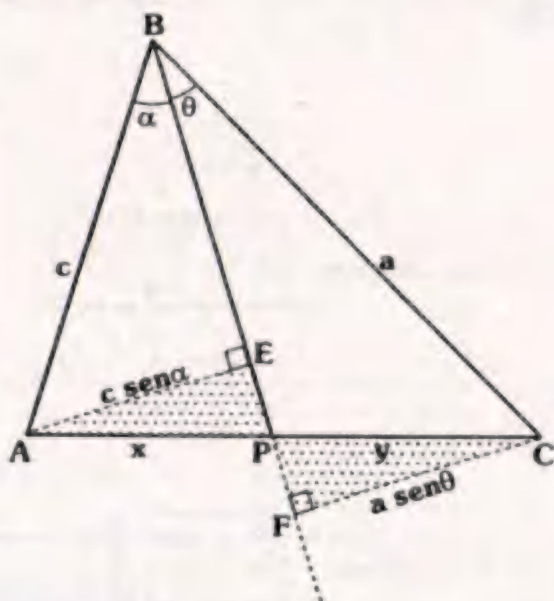
En el gráfico, se cumple:

$$\frac{x}{y} = \frac{c \operatorname{sen} \alpha}{a \operatorname{sen} \theta}$$

También:

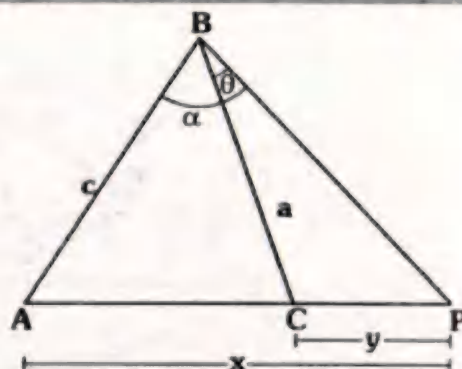
$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{xa}{yc}$$

Prueba



- Se trazan  $\overline{AE}$  y  $\overline{CF}$  perpendiculares a la recta  $\overleftrightarrow{BP}$  (E y F en  $\overleftrightarrow{AP}$ )
- En  $\triangle AEB$ :  $AE = c \operatorname{sen} \alpha$
- En  $\triangle BFC$ :  $CF = a \operatorname{sen} \theta$
- $\triangle AEP \sim \triangle CFP \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{c \operatorname{sen} \alpha}{a \operatorname{sen} \theta}$

TEOREMA



En el gráfico,  $\overline{BP}$  es ceviana exterior.

Se cumple:

$$\frac{x}{y} = \frac{c \operatorname{sen} \alpha}{a \operatorname{sen} \theta}$$

También:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{xa}{yc}$$

La prueba es análoga a la anterior.

Observación

Veamos los casos particulares

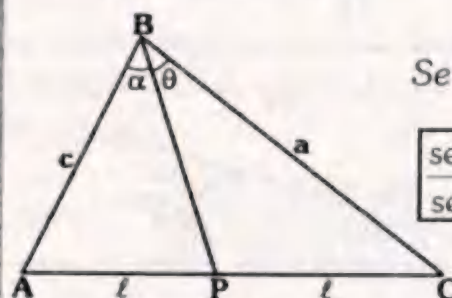
• Si  $AB = BC$



Se cumple:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{x}{y}$$

• Si  $\overline{BP}$  es mediana:



Se cumple:

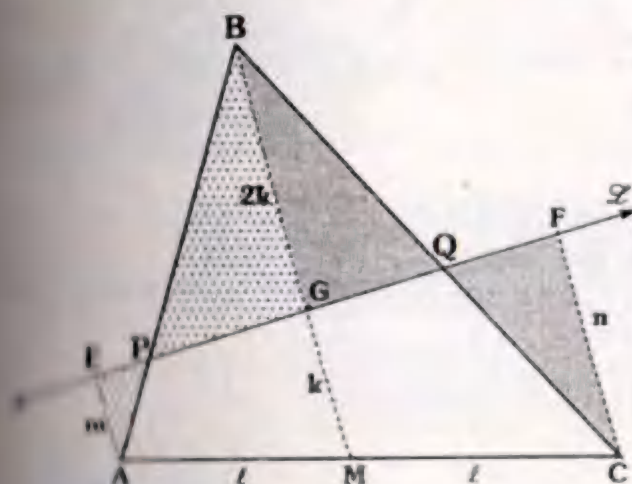
$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{a}{c}$$

# TEOREMA

Una recta pasa por el baricentro  $G$  del triángulo  $ABC$  y corta a  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  en  $P$  y  $Q$  respectivamente.

Se cumple: 
$$\frac{AP}{PB} + \frac{CQ}{QB} = 1$$

## Prueba



Se traza  $\overline{AE}$  y  $\overline{CF}$  paralelos a  $\overline{BM}$ .

$$\triangle AEP \sim \triangle BGP \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{m}{2k} \quad \dots (I)$$

$$\triangle CFQ \sim \triangle BGQ \Rightarrow \frac{CQ}{QB} = \frac{n}{2k} \quad \dots (II)$$

Sumando (I) y (II):

$$\frac{AP}{PB} + \frac{CQ}{QB} = \frac{m+n}{2k} \quad \dots (III)$$

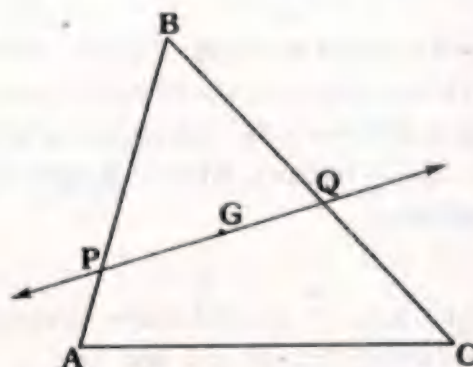
En el trapecio AEFC:

$$k = \frac{m+n}{2} \Rightarrow m+n=2k \quad \dots (IV)$$

De (III) y (IV):

$$\frac{AP}{PB} + \frac{CQ}{QB} = 1$$

## Observación



En el gráfico  $G$  es baricentro del  $\triangle ABC$ .  
Se cumple:

$$\left( \frac{AP}{PB} \right) \left( \frac{CQ}{QB} \right) \leq \frac{1}{4}$$

## Prueba

• Usando el resultado anterior:

$$\frac{AP}{PB} + \frac{CQ}{QB} = 1$$

• Usando:  $MG \leq MA$  para  $\frac{AP}{PB}$  y  $\frac{CQ}{QB}$

$$\sqrt{\left( \frac{AP}{PB} \right) \left( \frac{CQ}{QB} \right)} \leq \frac{1}{2} \underbrace{\left( \frac{AP}{PB} + \frac{CQ}{QB} \right)}_1$$

$$\Rightarrow \left( \frac{AP}{PB} \right) \left( \frac{CQ}{QB} \right) \leq \frac{1}{4}$$

La igualdad se cumple cuando:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{CQ}{QB}$$

Es decir:

$$\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$$



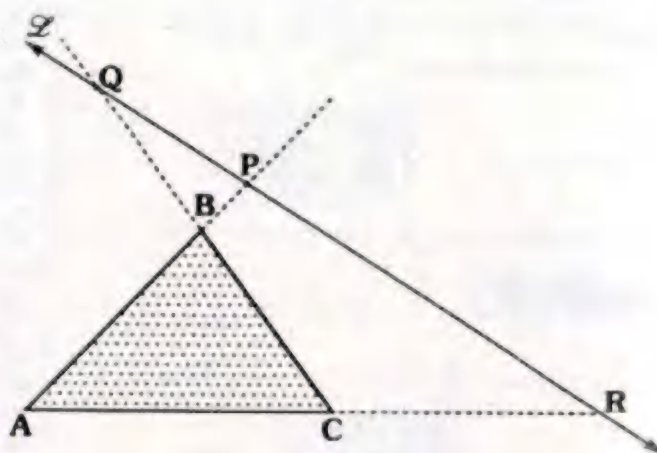
## ESTUDIO DEL TEOREMA DE MENELAO

En la primera parte analizamos el teorema de Menelao, para el caso en que la recta es secante a dos lados del triángulo y a la prolongación del tercero. Ahora veamos otras posibilidades.

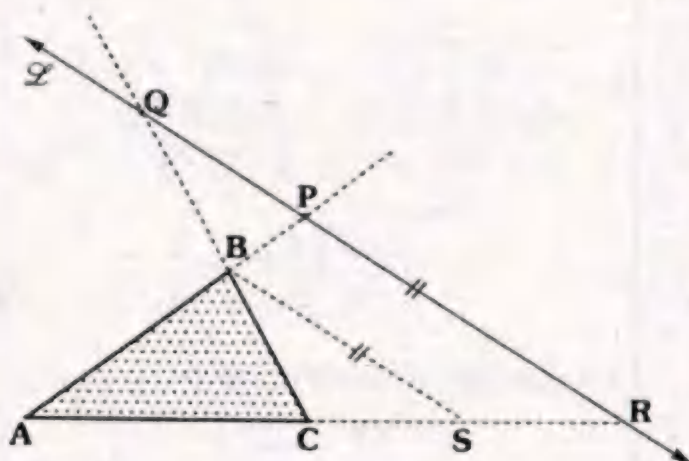
En el gráfico,  $\mathcal{L}$  es una recta secante a las prolongaciones de los lados del triángulo.

Se cumple:

$$(AP)(BQ)(CR) = (PB)(QC)(RA) \text{ o también: } \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$$



### Prueba



– Ubicamos S en  $\overline{CR}$  tal que  $\overline{BS} \parallel \mathcal{L}$

– Por teorema de Tales, en:

$$\bullet \triangle APR, \text{ con } \overline{BS} \parallel \overline{PR}: \frac{AP}{PB} = \frac{AR}{RS} \dots (I)$$

$$\bullet \triangle CQR, \text{ con } \overline{BS} \parallel \overline{QR}: \frac{BQ}{QC} = \frac{SR}{RC} \dots (II)$$

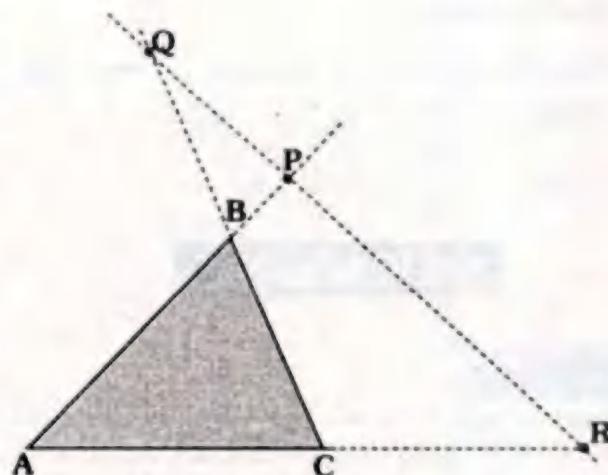
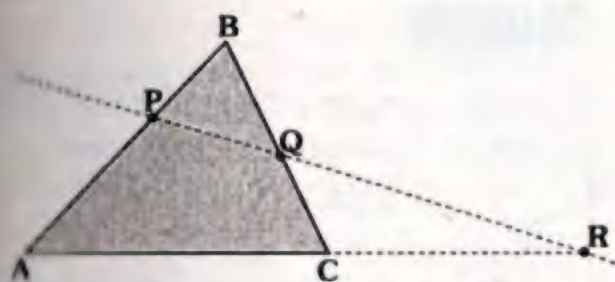
– De (I) y (II):

$$\begin{aligned} \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} &= \frac{AR}{RS} \cdot \frac{SR}{RC} \\ \Rightarrow \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} &= 1 \end{aligned}$$

## RECÍPROCO DEL TEOREMA DE MENELAO

Una de las aplicaciones muy importantes para el análisis de la colinealidad es los recíprocos del teorema de Menelao y Ceva.

Veamos el recíproco en ambos casos:



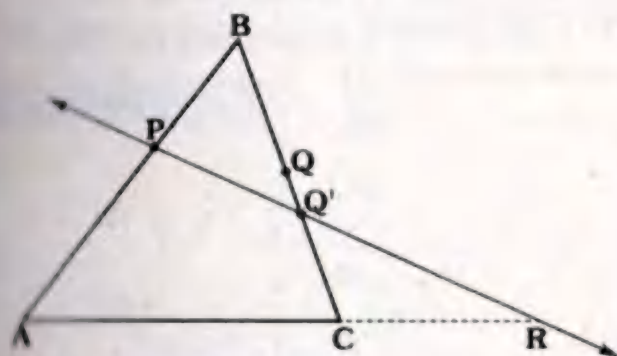
En ambos casos, se cumple:

$$\text{Si } \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1 \Rightarrow P, Q \text{ y } R \text{ son colineales}$$

**Prueba.**

Ambos casos se prueba en forma análoga.

Veamos el **primer caso**, supongamos que P, Q y R no son colineales y la recta que pasa por P y R corta a  $\overline{BC}$  en  $Q'$ .



– Por hipótesis:

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{AR}{RC} = 1 \quad \dots (I)$$

– Por teorema de Menelao:

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ'}{Q'C} \cdot \frac{AR}{RC} = 1 \quad \dots (II)$$

De (I) y (II):

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{BQ'}{Q'C} \Rightarrow \frac{BQ}{BQ+QC} = \frac{BQ'}{BQ'+Q'C}$$



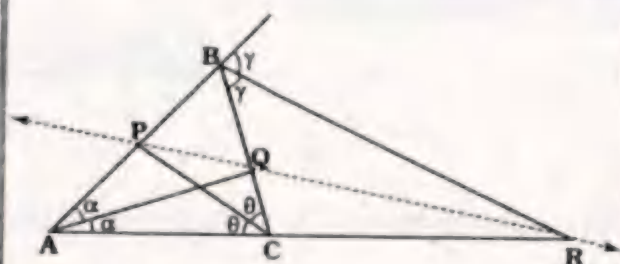
- Luego  $BQ = BQ'$ , por axioma de la construcción de un segmento (ver pág. N° 8, del libro de congruencia de triángulos), deducimos que  $Q = Q'$ .
- Por lo tanto P, Q y R están en una misma recta.
- Análogamente se prueba el segundo caso.

## APLICACIONES

### TEOREMA

En todo triángulo los pies de dos bisectrices interiores y el pie de la bisectriz exterior trazada del tercer vértice, son colineales.

Si  $AB \neq BC$



Se cumple:

P, Q y R son colineales

### Prueba

- Sea  $AB=c$ ;  $BC=a$  y  $AC=b$
- Por teorema de la bisectriz interior:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{b}{a} \quad \dots (I)$$

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{c}{b} \quad \dots (II)$$

- Por teorema de la bisectriz exterior:

$$\frac{CR}{RA} = \frac{a}{c} \quad \dots (III)$$

- De (I), (II) y (III):

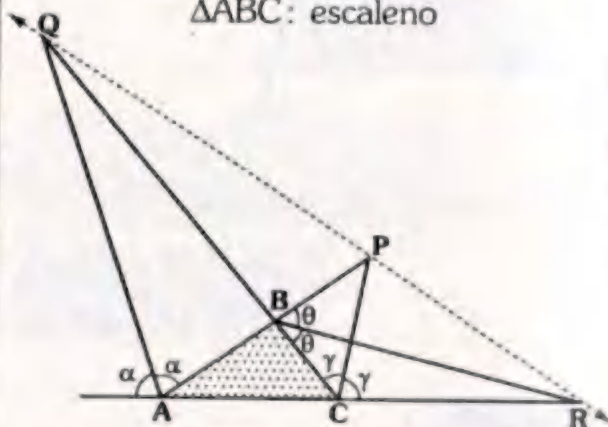
$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} = 1$$

$\therefore$  P, R y Q colineales.

### TEOREMA

En todo triángulo escaleno los pies de las bisectrices exteriores son colineales.

$\triangle ABC$ : escaleno



En el gráfico, P, Q y R son colineales.

### Prueba

- Sea  $AB=c$ ;  $BC=a$  y  $AC=b$
- Por teorema de la bisectriz exterior:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{b}{a} \quad \dots (I)$$

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{c}{b} \quad \dots (II)$$

$$\frac{CR}{RA} = \frac{a}{c} \quad \dots (III)$$

- De (I), (II) y (III):  $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$

- Por el recíproco del segundo caso del Teorema de Menelao: P, Q y R son colineales.

# TEOREMA

En el gráfico, A, B y C son puntos de tangencia y el triángulo ABC es escaleno.

Se cumple:

P, Q y R son colineales

**Prueba**

Sea  $AB=c$ ;  $BC=a$  y  $AC=b$

Por teorema:

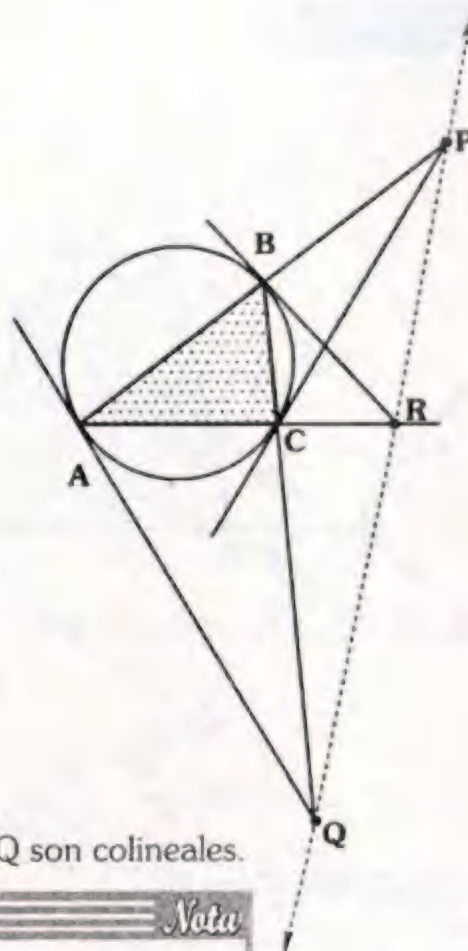
$$\frac{AP}{PB} = \frac{b^2}{a^2} \quad \dots (I)$$

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{c^2}{b^2} \quad \dots (II)$$

$$\frac{CR}{RA} = \frac{a^2}{c^2} \quad \dots (III)$$

De (I), (II) y (III): 
$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{a^2}{c^2} = 1$$

Por el recíproco del segundo caso de Menelao, P, R y Q son colineales.



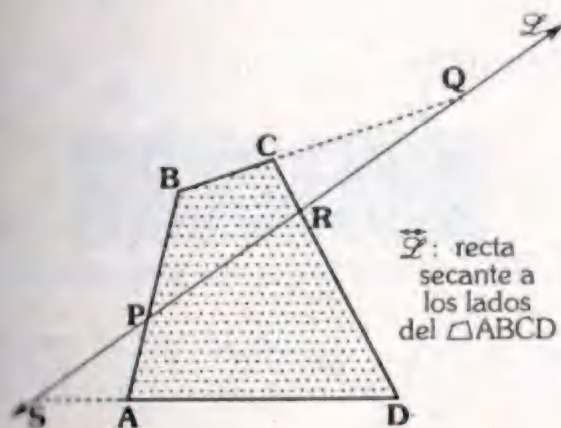
*Nota*

La recta que contiene a dichos puntos se denomina recta de Lemoine.

## GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE MENELAO PARA POLÍGONOS

Hemos analizado el teorema de Menelao, para el caso del triángulo, veamos ahora para el cuadrilátero, pentágono y en general para todo polígono

### En el cuadrilátero

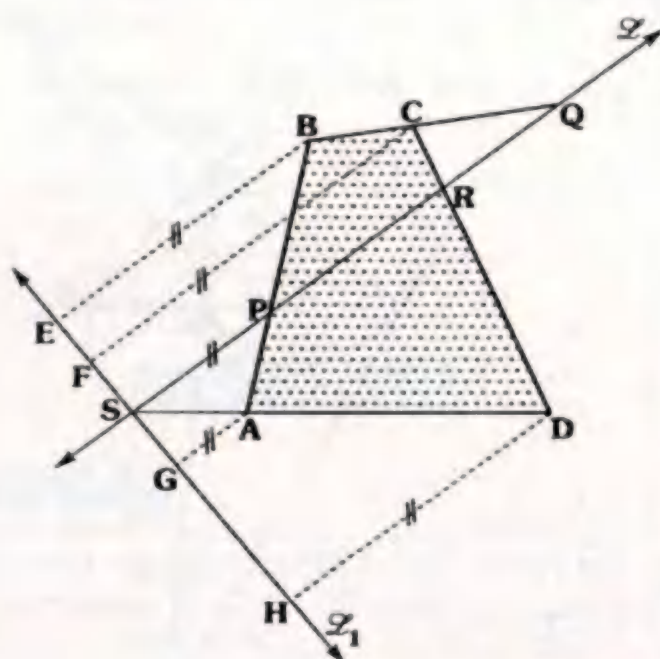


Se cumple:

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1$$



Prueba



- Por S trazamos una recta arbitraria, se trazan  $\overline{BE}$ ,  $\overline{CF}$ ,  $\overline{AG}$  y  $\overline{DH}$  paralelas a la recta  $\mathcal{L}$ . (E, F, S, G y H en  $\mathcal{L}_1$ )
- Por teorema de Tales:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{GS}{SE} \quad \dots (I)$$

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{ES}{SF} \quad \dots (II)$$

$$\frac{CR}{RD} = \frac{FS}{SH} \quad \dots (III)$$

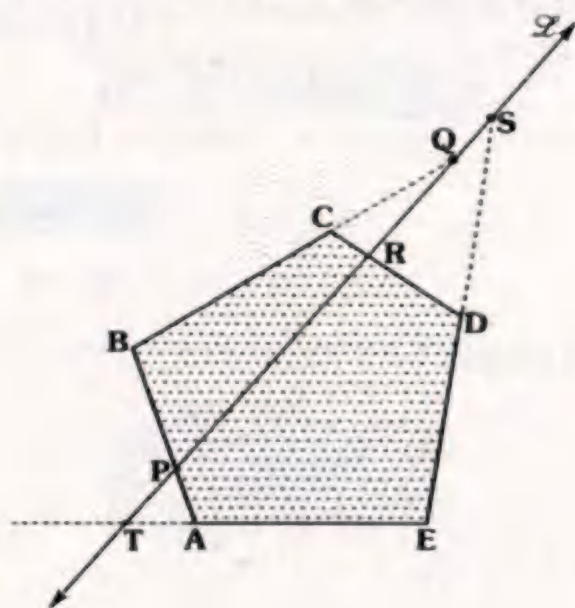
$$\frac{DS}{SA} = \frac{HS}{SG} \quad \dots (IV)$$

– De (I), (II), (III) y (IV):

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1$$

Mostremos el caso del pentágono de forma ilustrativa, demostraremos luego el caso general. En el pentágono.

En el pentágono



$\mathcal{L}$  es una recta secante a todos los lados.

Se cumple:

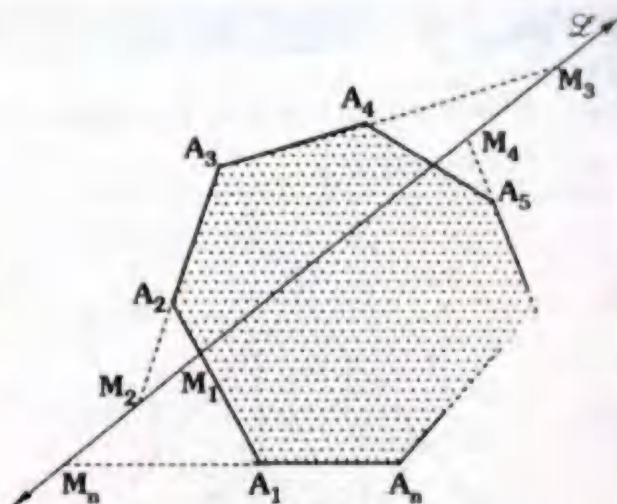
$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} \cdot \frac{ET}{TA} = 1$$

**En general**

Sea  $A_1A_2A_3...A_n$  un polígono y  $\vec{\mathcal{L}}$  una recta secante a todos los lados.

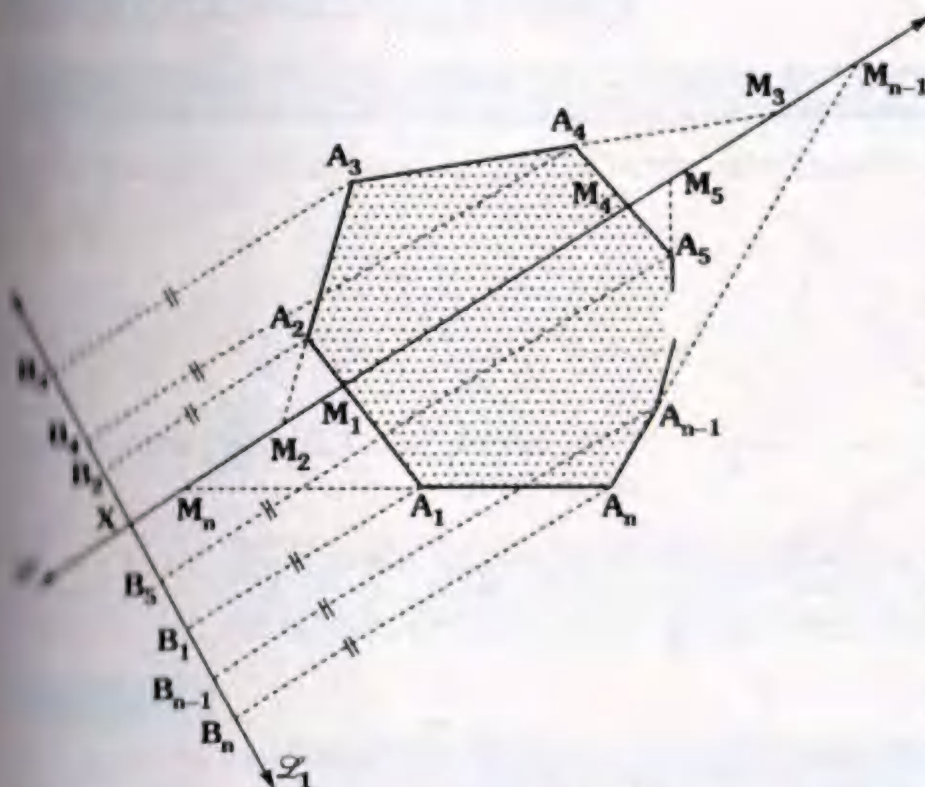
Se cumple:

$$\frac{A_1M_1}{M_1A_2} \cdot \frac{A_2M_2}{M_2A_3} \cdot \frac{A_3M_3}{M_3A_4} \cdots \frac{A_{n-1}M_{n-1}}{M_{n-1}A_n} \cdot \frac{A_nM_n}{M_nA_1} = 1$$



**Prueba**

Se ubica  $X$  en  $\vec{\mathcal{L}}$  y se traza la recta  $\mathcal{L}_1$ , se trazan  $\overline{A_1B_1}$ ,  $\overline{A_2B_2}$ , ...,  $\overline{A_nB_n}$  tal que  $\overline{A_iB_i} \parallel \vec{\mathcal{L}}$  ( $i=1, \dots, n$ ) con  $B_i \in \mathcal{L}_1$ .



• Por teorema de Tales:

$$\frac{A_1M_1}{M_1A_2} = \frac{B_1X}{XB_2} \quad \dots (1)$$

$$\frac{A_2M_2}{M_2A_3} = \frac{B_2X}{XB_3} \quad \dots (2)$$

$$\frac{A_3M_3}{M_3A_4} = \frac{B_3X}{XB_4} \quad \dots (3)$$

$$\vdots$$

$$\frac{A_{n-1}M_{n-1}}{M_{n-1}A_n} = \frac{B_{n-1}X}{XB_n} \quad \dots (n-1)$$

$$\frac{A_nM_n}{M_nA_1} = \frac{B_nX}{XB_1} \quad \dots (n)$$

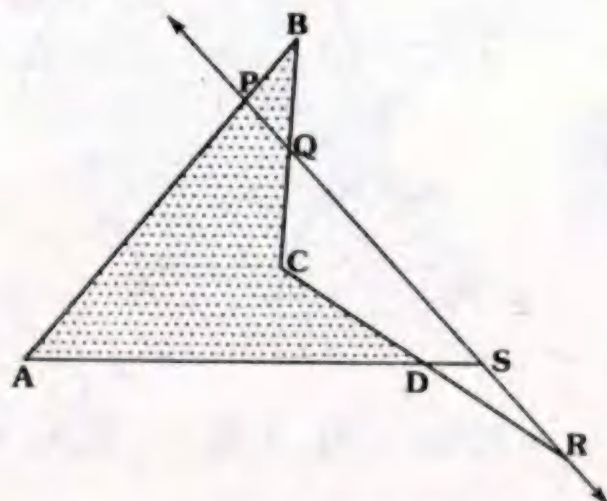
Multiplicando las expresiones (1), (2), (3), ..., (n)

$$\frac{A_1M_1}{M_1A_2} \cdot \frac{A_2M_2}{M_2A_3} \cdot \frac{A_3M_3}{M_3A_4} \cdots \frac{A_{n-1}M_{n-1}}{M_{n-1}A_n} \cdot \frac{A_nM_n}{M_nA_1} = \frac{B_1X}{XB_2} \cdot \frac{B_2X}{XB_3} \cdot \frac{B_3X}{XB_4} \cdots \frac{B_{n-1}X}{XB_n} \cdot \frac{B_nX}{XB_1} = 1$$



Nota

- El teorema anterior se cumple para todo polígono (convexo y no convexo).
- Por ejemplo:

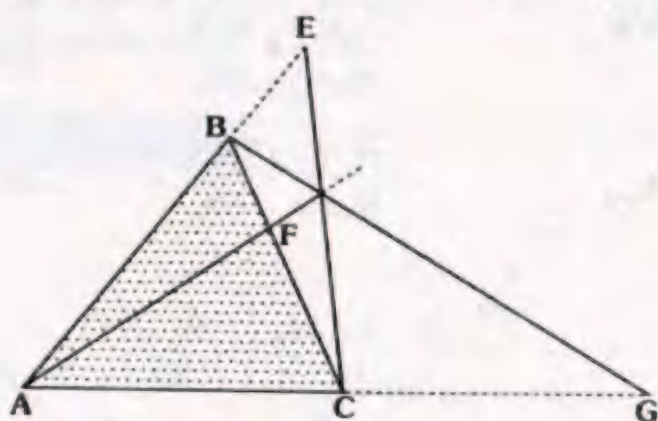


En el gráfico, se cumple:

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RD} \cdot \frac{DS}{SA} = 1$$

## ESTUDIO DEL TEOREMA DE CEVA

Veremos aquí una segunda posibilidad del teorema de Ceva, así como su forma trigonométrica y aplicaciones.



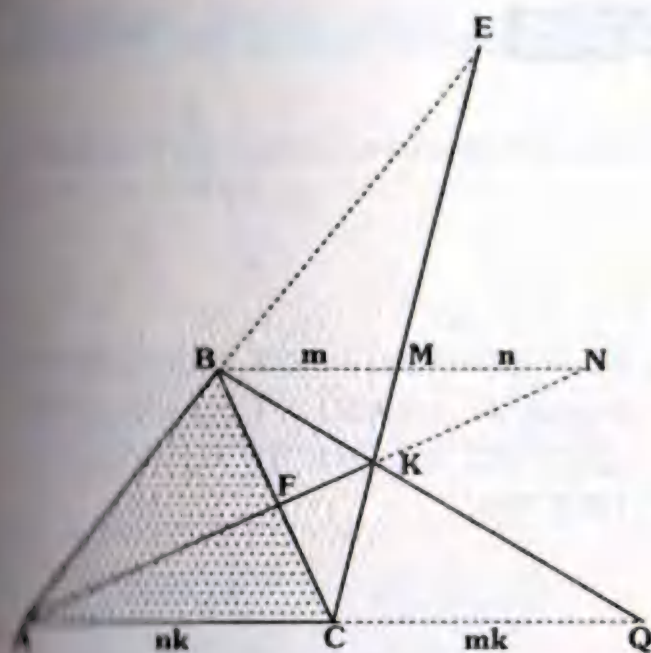
En el gráfico,  $\overline{AF}$ ,  $\overline{CE}$  y  $\overline{BG}$  son cevianas concurrentes.

Se cumple:

$$(AE)(BF)(CG) = (EB)(FC)(GA) \quad \text{ó} \quad \frac{AE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GA} = 1$$

Prueba

Se puede proceder análogamente como en el primer caso, pero optemos por el siguiente método:



– Por B se traza la paralela a  $\overline{AC}$  que corta a  $\overline{EC}$  en M y a la prolongación de  $\overline{AF}$  en N.

– Sea  $BM=m$  y  $MN=n \Rightarrow AC=nk$  y  $CQ=mk$

–  $\triangle AEC \sim \triangle BEM: \frac{AE}{EB} = \frac{nk}{m} \dots (I)$

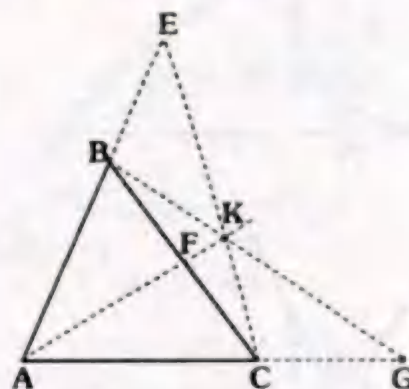
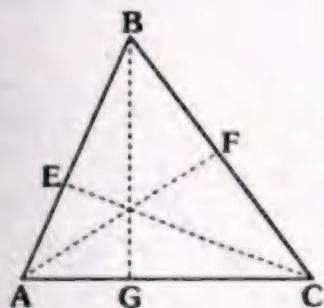
–  $\triangle BFN \sim \triangle CFA: \frac{BF}{FC} = \frac{m+n}{nk} \dots (II)$

– Notemos:  $\frac{CQ}{QA} = \frac{mk}{(m+n)k} \dots (III)$

De (I), (II) y (III):  $\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$

### RECÍPROCO DEL TEOREMA DE CEVA

Ambos casos son similares



Se cumple: Si  $\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GA} = 1 \Rightarrow \overline{AF}, \overline{CE}$  y  $\overline{BG}$  son concurrentes

### Prueba

Para la prueba, optenemos por el método del absurdo, para ello tracemos las cevianas  $\overline{BG}$  y  $\overline{CE}$  secantes en K y supongamos que la recta  $\overline{AK}$  corta a  $\overline{BC}$  en  $F'$ .

Por teorema de Ceva:  $\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BF'}{F'C} \cdot \frac{CG}{GA} = 1$

Por condición:  $\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GA} = 1$

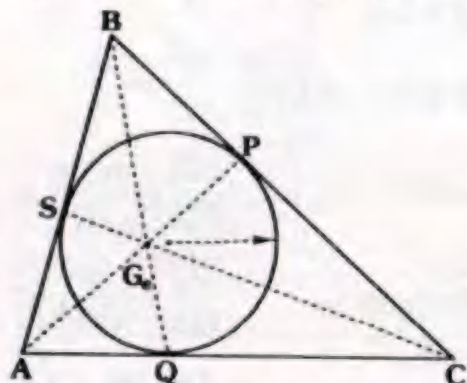
De donde:  $\frac{BF'}{F'C} = \frac{BF}{FC} \Rightarrow F'=F$



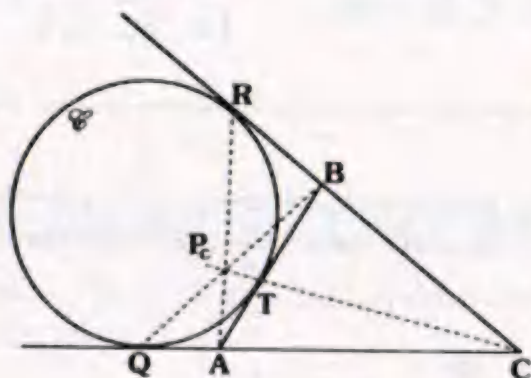
## APLICACIONES

### TEOREMA

Los siguientes teoremas sobre concurrencias fueron demostrados en el libro de "Puntos Notables", sólo los mencionaremos:

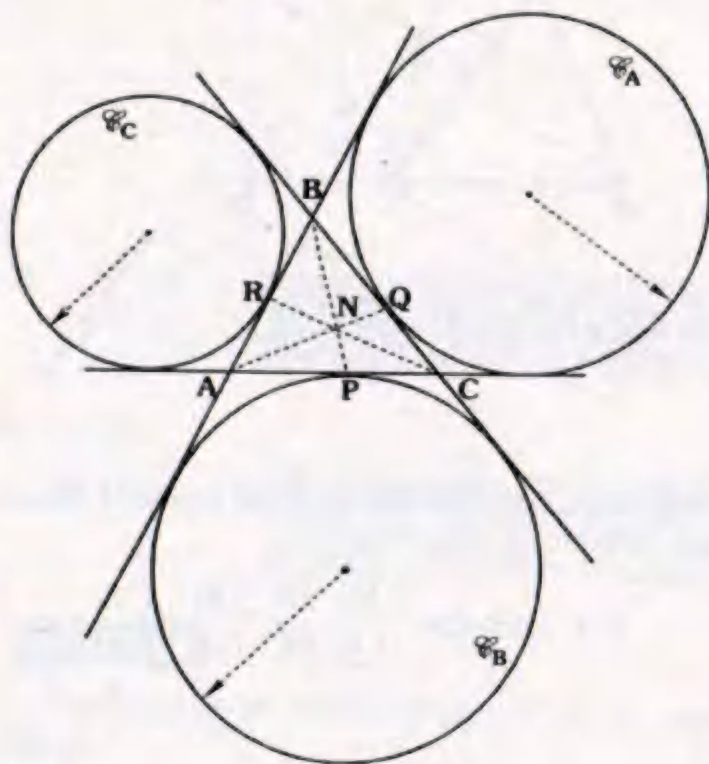


En el gráfico, se muestra la circunferencia inscrita en el  $\triangle ABC$ . Las cevianas  $\overline{AP}$ ,  $\overline{CS}$  y  $\overline{BQ}$  concurren en  $G_e$  (Punto de Gergonne).



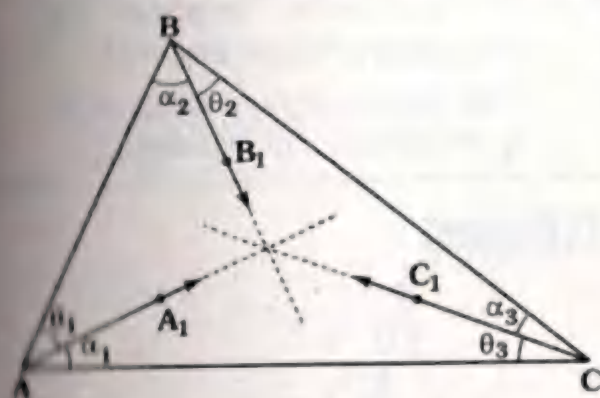
$\mathcal{C}_e$  es la circunferencia exinscrita relativa a  $\overline{AB}$ .

Las cevianas  $\overline{BQ}$ ,  $\overline{AR}$  y  $\overline{CT}$  concurren en el punto  $P_e$  (Punto de Poncelet).



- $\mathcal{C}_A$ ,  $\mathcal{C}_B$  y  $\mathcal{C}_C$  son las circunferencias exinscritas respecto del  $\triangle ABC$ .
- $\overline{AQ}$ ,  $\overline{CR}$  y  $\overline{BP}$  concurren en el punto  $N$  (Punto de Nagel).

# TEOREMA DE CEVA TRIGONOMÉTRICO



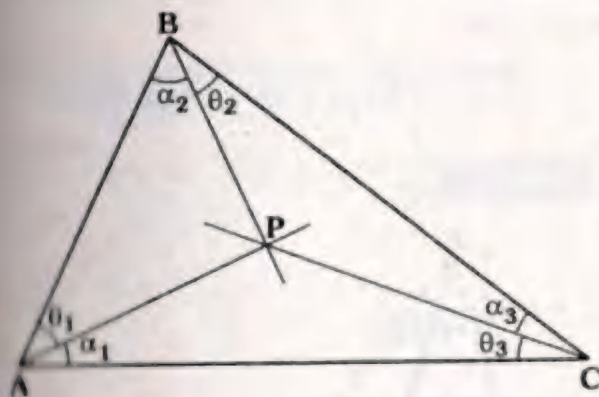
En el gráfico, se cumple:

$$\vec{AA_1}, \vec{BB_1} \text{ y } \vec{CC_1} \text{ concurren}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{sen} \alpha_1}{\text{sen} \theta_1} \cdot \frac{\text{sen} \alpha_2}{\text{sen} \theta_2} \cdot \frac{\text{sen} \alpha_3}{\text{sen} \theta_3} = 1$$

**Prueba**

Veamos la ida ( $\Rightarrow$ )



Sea P el punto de concurrencia, por Ley de senos, en:

$$\Delta APC: \frac{\text{sen} \alpha_1}{\text{sen} \theta_3} = \frac{PC}{PA} \quad \dots (I)$$

$$\Delta CPB: \frac{\text{sen} \alpha_3}{\text{sen} \theta_2} = \frac{PB}{PC} \quad \dots (II)$$

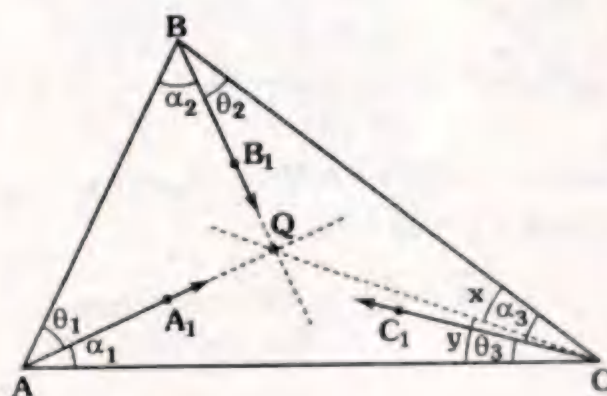
$$\Delta BPA: \frac{\text{sen} \alpha_2}{\text{sen} \theta_1} = \frac{PA}{PB} \quad \dots (III)$$

De (I), (II) y (III):

$$\frac{\text{sen} \alpha_1}{\text{sen} \theta_3} \cdot \frac{\text{sen} \alpha_3}{\text{sen} \theta_2} \cdot \frac{\text{sen} \alpha_2}{\text{sen} \theta_1} = \frac{PC}{PA} \cdot \frac{PB}{PC} \cdot \frac{PA}{PB}$$

$$\therefore \frac{\text{sen} \alpha_1}{\text{sen} \theta_1} \cdot \frac{\text{sen} \alpha_2}{\text{sen} \theta_2} \cdot \frac{\text{sen} \alpha_3}{\text{sen} \theta_3} = 1$$

Analicemos la vuelta ( $\Leftarrow$ )



Sea  $\vec{AA_1} \cap \vec{BB_1} = \{Q\}$ ,  $m \angle BCQ = x$  y  $m \angle QCA = y$

Notemos:  $\alpha_3 + \theta_3 = x + y$

Por condición:

$$\frac{\text{sen} \alpha_1}{\text{sen} \theta_1} \cdot \frac{\text{sen} \alpha_2}{\text{sen} \theta_2} \cdot \frac{\text{sen} \alpha_3}{\text{sen} \theta_3} = 1 \quad \dots (a)$$

Por teorema:

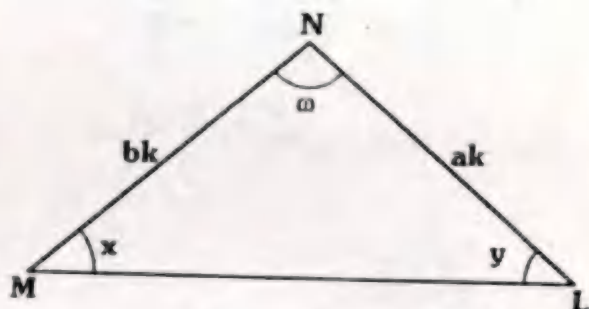
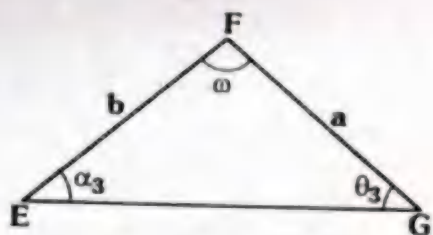
$$\frac{\text{sen} \alpha_1}{\text{sen} \theta_1} \cdot \frac{\text{sen} \alpha_2}{\text{sen} \theta_2} \cdot \frac{\text{sen} x}{\text{sen} y} = 1 \quad \dots (b)$$

De (a) y (b):

$$\frac{\text{sen} \alpha_3}{\text{sen} \theta_3} = \frac{\text{sen} x}{\text{sen} y} \quad \dots (c)$$

Y como  $\alpha_3 + \theta_3 = x + y$ . Construimos los siguientes triángulos.





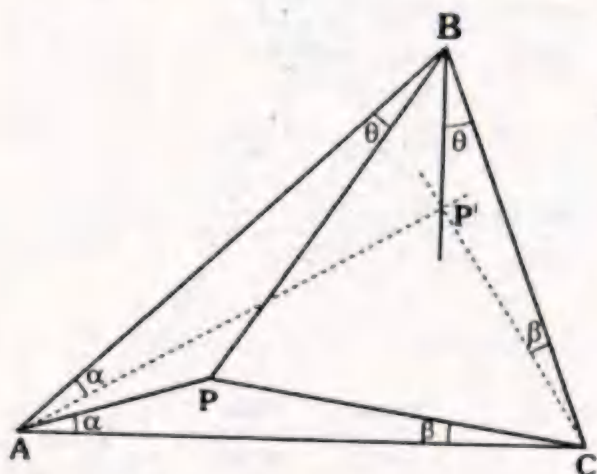
Luego:  $\triangle EFG \sim \triangle MNL \Rightarrow x = \alpha_3$   
es decir  $C_1$  está en  $\overline{CQ}$

$\therefore \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}$  y  $\overrightarrow{CC_1}$  concurren

## APLICACIONES

### TEOREMA

Si tres cevianas concurren respecto a un triángulo, entonces sus isogonales también concurren:

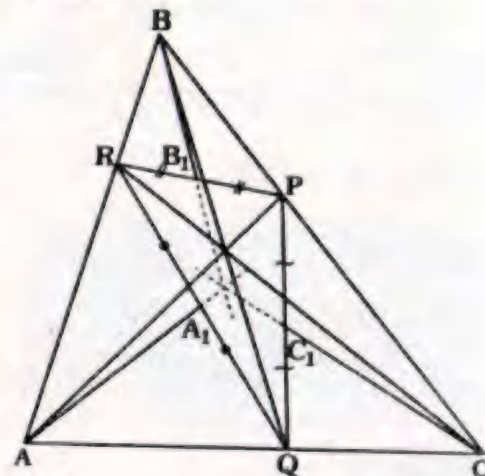


La prueba es directa, los puntos P y P' se llaman conjugados isogonales.

### Nota

- El conjugado isogonal del ortocentro es el circuncentro.
- El conjugado isogonal del baricentro se denomina punto simediano.

### TEOREMA



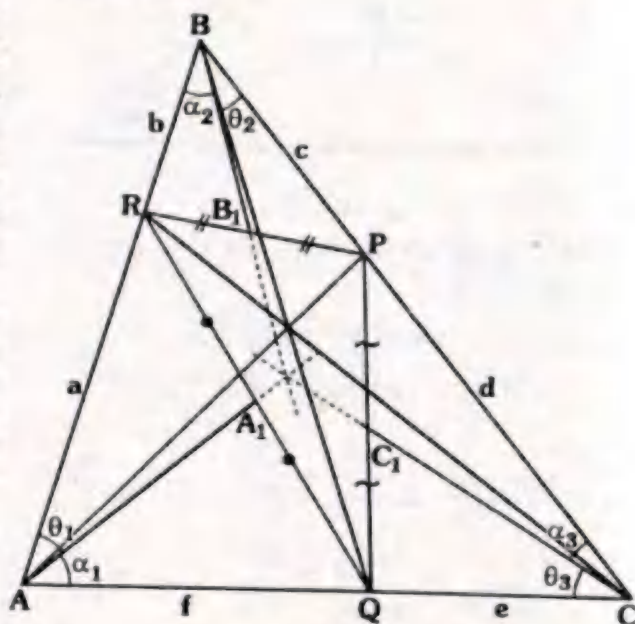
En el gráfico:

$$RA_1 = A_1Q, QC_1 = C_1P \text{ y } PB_1 = B_1R$$

Se cumple:

$\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}$  y  $\overrightarrow{CC_1}$  concurren

### Prueba



Demostremos que se cumple el teorema de Ceva trigonométrico.

Por teorema (pág. N° 47)

$$\Delta ARC: \frac{\text{sen} \alpha_1}{\text{sen} \theta_1} = \frac{a}{f} \quad \dots (I)$$

$$\Delta RBP: \frac{\text{sen} \alpha_2}{\text{sen} \theta_2} = \frac{c}{b} \quad \dots (II)$$

$$\Delta CPQ: \frac{\text{sen} \alpha_3}{\text{sen} \theta_3} = \frac{e}{d} \quad \dots (III)$$

De (I), (II) y (III):

$$\frac{\text{sen} \alpha_1}{\text{sen} \theta_1} \cdot \frac{\text{sen} \alpha_2}{\text{sen} \theta_2} \cdot \frac{\text{sen} \alpha_3}{\text{sen} \theta_3} = \frac{a}{f} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{e}{d} \quad \dots (IV)$$

Por teorema de Ceva:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = 1 \quad \dots (V)$$

De (IV) y (V):

$$\frac{\text{sen} \alpha_1}{\text{sen} \theta_1} \cdot \frac{\text{sen} \alpha_2}{\text{sen} \theta_2} \cdot \frac{\text{sen} \alpha_3}{\text{sen} \theta_3} = 1$$

$\therefore \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1} \text{ y } \overrightarrow{CC_1}$  concurren.

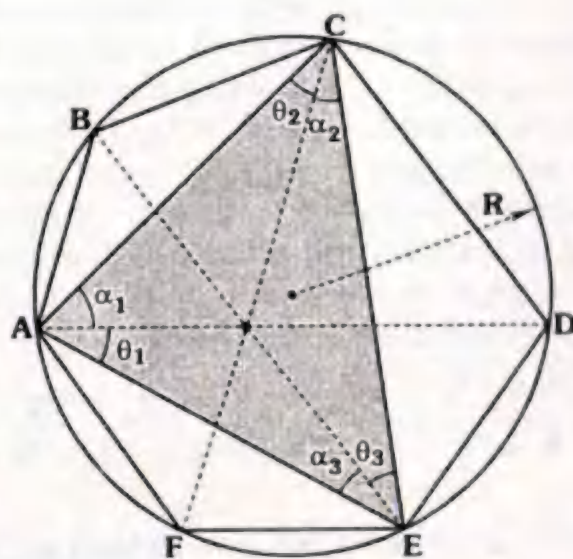
### TEOREMA

ABCDEF es un hexágono inscrito, se cumple:  $\overline{AD}, \overline{BE}$  y  $\overline{CF}$ .

Concurren si y solo si:

$$(AB)(CD)(EF) = (BC)(DE)(AF)$$

**Prueba**



- Analicemos el  $\Delta ACE$ .

- Por propiedad:

$$AB = 2R \text{sen} \alpha_3 \quad ; \quad BC = 2R \text{sen} \theta_3 \quad ;$$

$$CD = 2R \text{sen} \alpha_1 \quad ; \quad DE = 2R \text{sen} \theta_1 \quad ;$$

$$EF = 2R \text{sen} \alpha_2 \quad \text{y} \quad FA = 2R \text{sen} \theta_2$$

- En  $\Delta ACE$ :

$\overline{AD}, \overline{CF}$  y  $\overline{BE}$  concurren si y solo si:

$$\frac{\text{sen} \alpha_1}{\text{sen} \theta_1} \cdot \frac{\text{sen} \alpha_2}{\text{sen} \theta_2} \cdot \frac{\text{sen} \alpha_3}{\text{sen} \theta_3} = 1$$

$$\frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} \cdot \frac{AB}{BC} = 1$$

- Luego se puede escribir así:

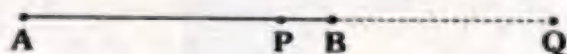
-  $\overline{AD}, \overline{CF}$  y  $\overline{BE}$  concurren si y solo si:

$$(CD)(EF)(AB) = (DE)(FA)(BC)$$



## DIVISIÓN ARMÓNICA

Es una de las herramientas más importantes en la resolución de problemas de Olimpiadas matemáticas y algunos ejercicios preuniversitarios. Estamos considerando por cuestiones prácticas la razón de segmentos como la razón de sus longitudes (en geometría moderna se plantea adecuadamente como la razón de segmentos dirigidos)



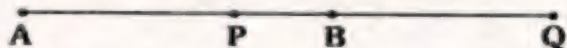
Si P y Q dividen a  $\overline{AB}$  en la misma razón, es decir:  $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$ , entonces se dice que P y Q dividen armónicamente a  $\overline{AB}$ .

También:

- \* P y Q son conjugados armónicos de  $\overline{AB}$ .
- \* A, P, B y Q determinan una CUATERNA ARMÓNICA.
- \* B y A son conjugados armónicos de  $\overline{QP}$ .

### TEOREMA DE DESCARTES

Si:  $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$



Se cumple:

$$\frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ} = \frac{2}{AB}$$

### Demostración

Como:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB} \Rightarrow \frac{PB}{AP} = \frac{QB}{AQ}$$

$$\Rightarrow \frac{AB - AP}{AP} = \frac{AQ - AB}{AQ}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AP} - 1 = 1 - \frac{AB}{AQ}$$

Luego:

$$AB \left( \frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ} \right) = 2$$

$$\therefore \frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ} = \frac{2}{AB}$$

### Nota

- Como B y A son conjugados armónicos de  $\overline{QP}$ , se cumple:

$$\frac{1}{QB} + \frac{1}{QA} = \frac{2}{QP}$$

- Juntando, ambas expresiones:

$$\frac{1}{AP} + \frac{2}{QP} = \frac{1}{QB} + \frac{2}{AB}$$

- El teorema también es recíproco

Si:  $\frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ} = \frac{2}{AB}$

$$\Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$$

### TEOREMA DE NEWTON

Si  $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$  y  $AM = MB$



Se cumple:

$$(AM)^2 = (MB)^2 = (MP)(MQ)$$

**Prueba**

Como  $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$

Sea  $AM = MB = x$

$$\Rightarrow \frac{x + MP}{x - MP} = \frac{x + MQ}{MQ - x}$$

Por razones y proporciones:

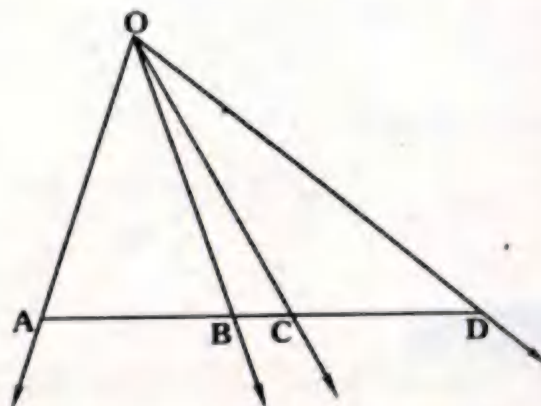
$$\frac{(x + MP) + (x - MP)}{(x + MP) - (x - MP)} = \frac{(x + MQ) + (MQ - x)}{(x + MQ) - (MQ - x)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{MP} = \frac{MQ}{x}$$

$$\therefore x^2 = (MP)(MQ)$$

### HAZ ARMÓNICO

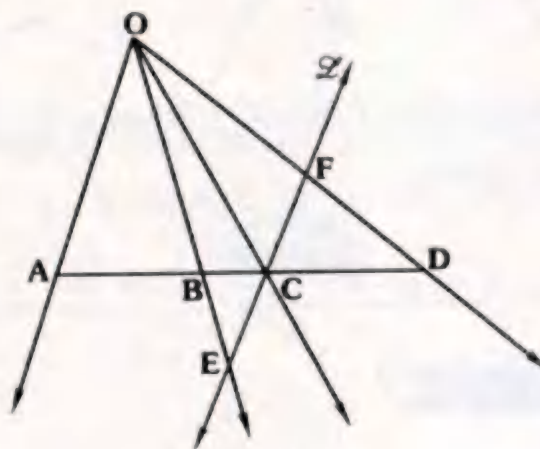
Sea A, B, C y D una cuaterna armónica y el punto O no está en la recta que contiene a dichos puntos, la unión de los rayos OA, OB, OC y OD se llama HAZ ARMÓNICO.



Si:  $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$  y  $\vec{OD}$  forman un haz armónico.

### TEOREMA

Si:  $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$  y  $\vec{\ell} \parallel \vec{AO}$



Se cumple:  $CF = CE$

**Prueba**

$$\Delta AOD \sim \Delta CFD \Rightarrow \frac{AO}{CF} = \frac{AD}{CD} \dots (1)$$

$$\Delta ABO \sim \Delta CBE \Rightarrow \frac{AO}{CE} = \frac{AB}{BC} \dots (2)$$



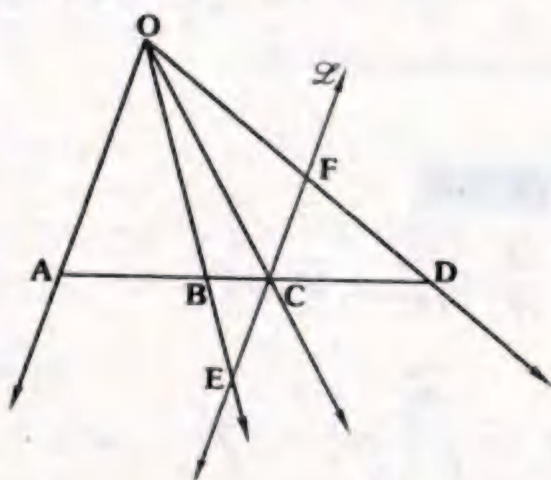
- De (1) y (2):  $\frac{AO}{CF} = \frac{AO}{CE} \Rightarrow CF = CE$

También es cierto:

Si  $CF = CE$  y  $\overline{L} \parallel \overline{AO} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$

### TEOREMA

Si:  $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$  y  $EC = CF$



Se cumple:

$$\overline{L} \parallel \overline{AO}$$

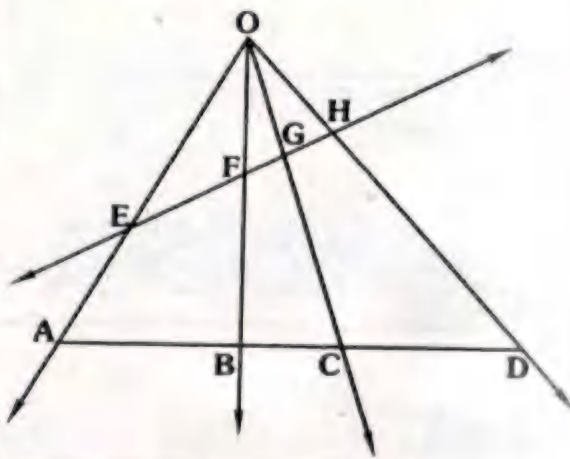
### Prueba

- Supongamos que no son paralelas.
- Se traza por C una recta  $\overline{L'}$  paralela a  $\overline{AO}$  que corta a la prolongación de  $\overline{OB}$  en  $E'$  y a  $\overline{OD}$  en  $F'$ , por teorema  $E'C = CF'$ .
- $\triangle ECE' \cong \triangle FCF'$ , luego:  $\overline{EB} \parallel \overline{FD}$  lo cual es contradicción.

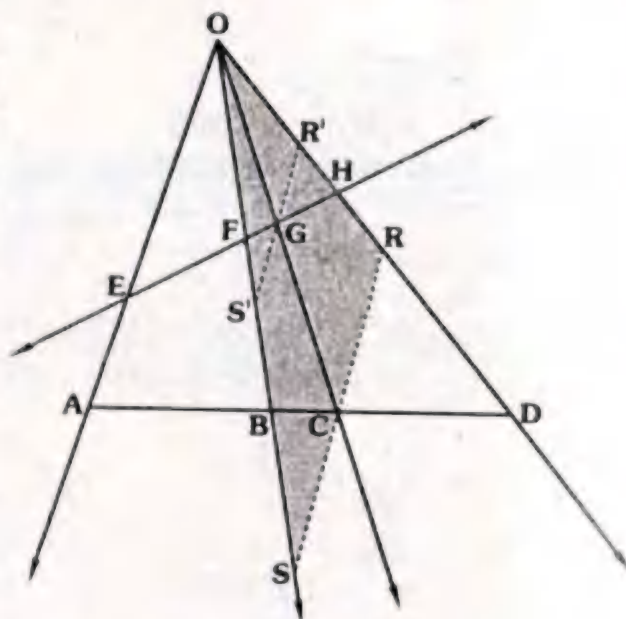
$$\therefore \overline{L} \parallel \overline{AO}$$

### TEOREMA

Si:  $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{EF}{FG} = \frac{EH}{HG}$



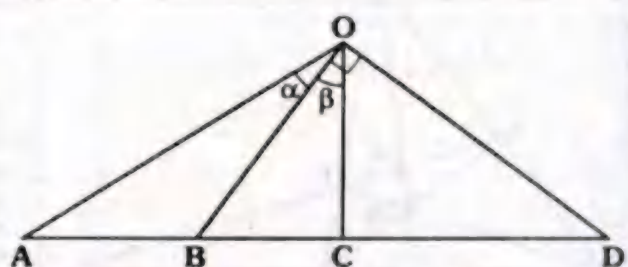
### Prueba



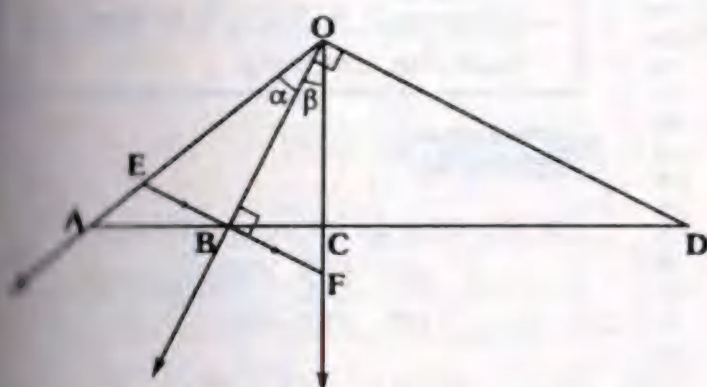
- Por C y G se trazan las paralelas a  $\overline{AO}$ .
- Como  $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow SC = CR$
- $\triangle SOR \sim \triangle S'OR' \Rightarrow S'G = GR'$
- Como  $S'G = GR' \Rightarrow \frac{EF}{FG} = \frac{EH}{HG}$

# TEOREMA

Si:  $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$  y  $m\angle BOD = 90^\circ$   
 $\Rightarrow \alpha = \beta$



## Prueba

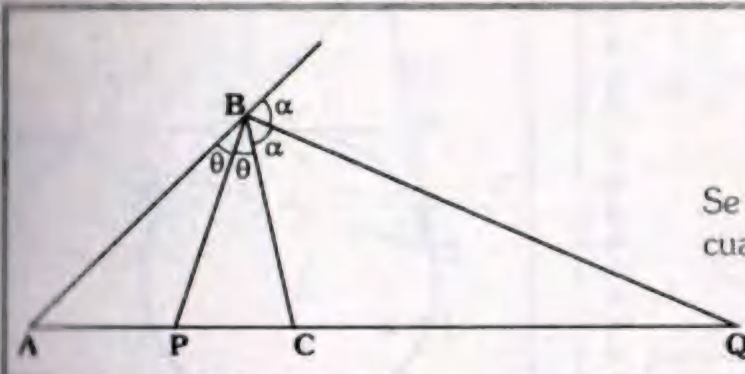


- Se traza la paralela a  $\overline{OD}$  por B como  $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$  por teorema:  
 $EB = BF$
- $\triangle EOF$  : isósceles  $\Rightarrow \alpha = \beta$

# CASOS COMUNES DE CUATERNAS ARMÓNICAS

Daremos algunos casos frecuentes de las cuaternas armónicas, demostraremos algunos y otros lo dejaremos como ejercicio para el lector.

1



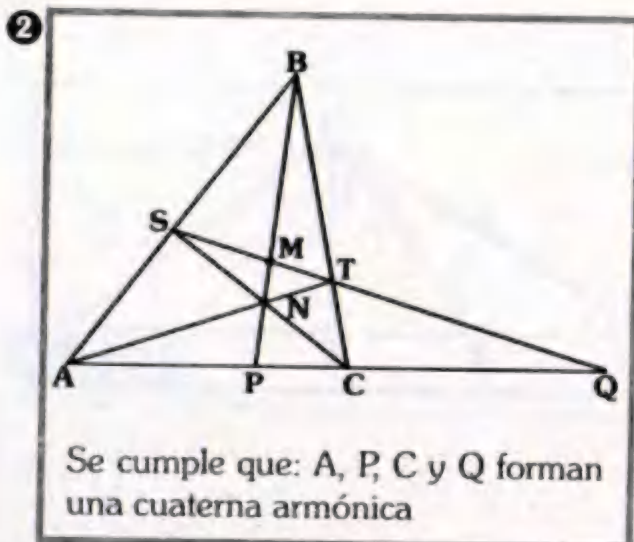
Se cumple: A, P, C y Q forman una cuaterna armónica.

## Prueba

En el  $\triangle ABC$ , por teorema de la bisectriz interior y exterior, tendremos:

$$\frac{AP}{PC} = \frac{AB}{BC} \quad \text{y} \quad \frac{AQ}{QC} = \frac{AB}{BC} \quad \Rightarrow \quad \frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{QC}$$





**Prueba**

En el  $\Delta ABC$ :

– Teorema de Menelao:

$$\frac{AS}{SB} \cdot \frac{BT}{TC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1 \quad \dots (I)$$

– Teorema de Ceva:

$$\frac{AS}{SB} \cdot \frac{BT}{TC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1 \quad \dots (II)$$

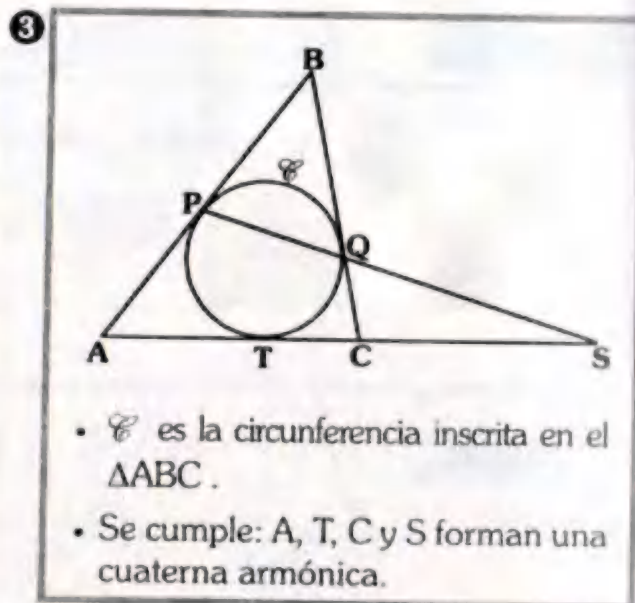
De (I) y (II):

$$\begin{aligned} \frac{CQ}{QA} &= \frac{CP}{PA} \\ \therefore \frac{AP}{PC} &= \frac{AQ}{QC} \end{aligned}$$

**Observación**

En el último gráfico, también hay cuaterna armónica, en:

- \* S, M, T y Q
- \* B, M, N y P



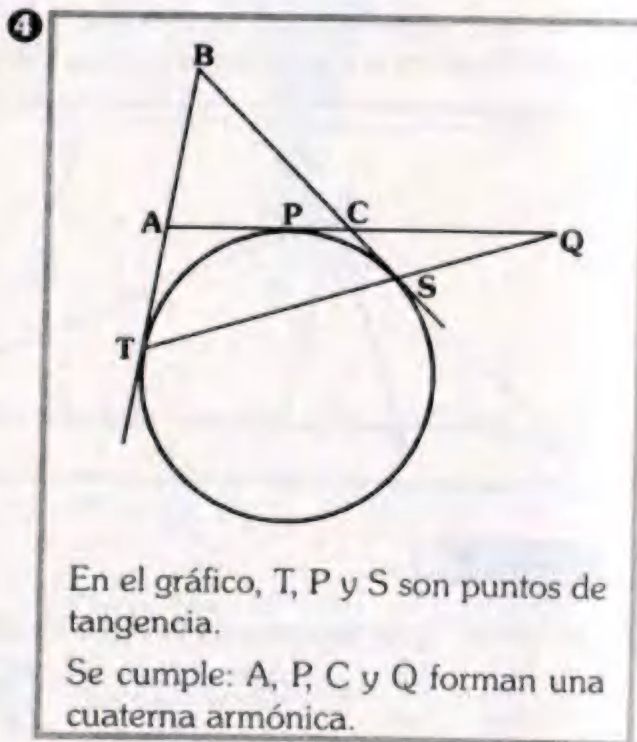
**Prueba**

– Por teorema de Menelao en el  $\Delta ABC$

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CS}{SA} = 1$$

– Como  $AP=AT$  y  $QC=TC$

$$\Rightarrow \frac{AT}{TC} \cdot \frac{CS}{AS} = 1 \Rightarrow \frac{AT}{TC} = \frac{AS}{SC}$$



**Prueba**

En el  $\triangle ABC$ , por el segundo caso del teorema de Menelao:

$$\frac{AT}{TB} \cdot \frac{BS}{SC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

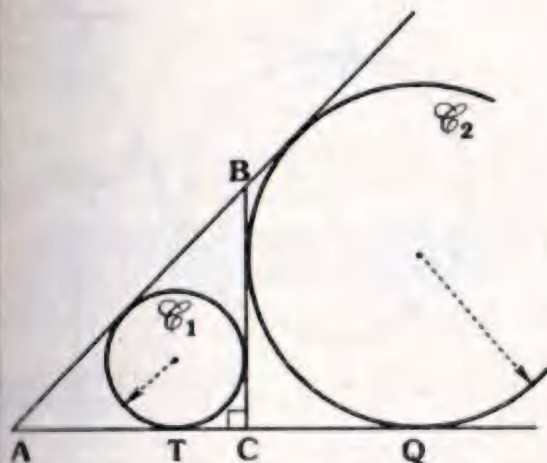
Como:  $AT=AP$  y  $SC=PC$

$$\Rightarrow \frac{AP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

$$\therefore \frac{AP}{PC} = \frac{AQ}{QC}$$

6

En el gráfico,  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  son la circunferencia inscrita y exinscrita respecto al  $\triangle ABC$ .



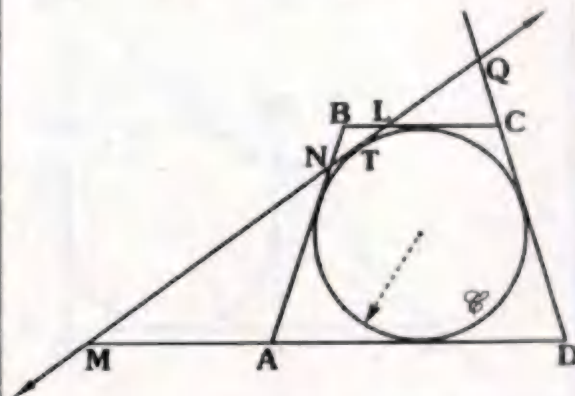
Se cumple:

A, T, C y Q forman una cuaterna armónica.

La prueba se deja como ejercicio para el lector.

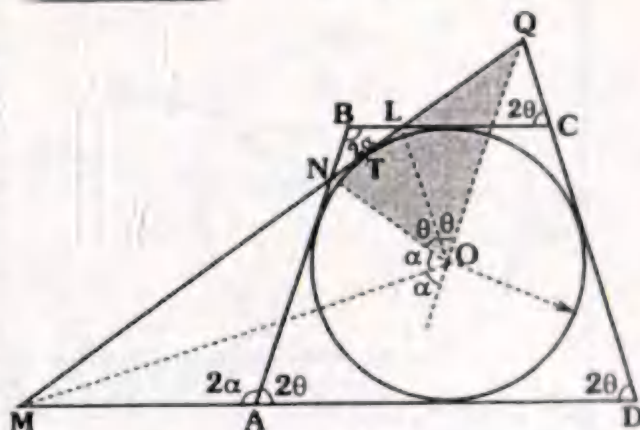
6

En el gráfico,  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$  y  $AB=CD$ ,  $\mathcal{C}$  es la circunferencia inscrita en el trapecio ABCD y T es punto de tangencia.



Se cumple que M, N, L y Q forman una cuaterna armónica.

**Prueba**

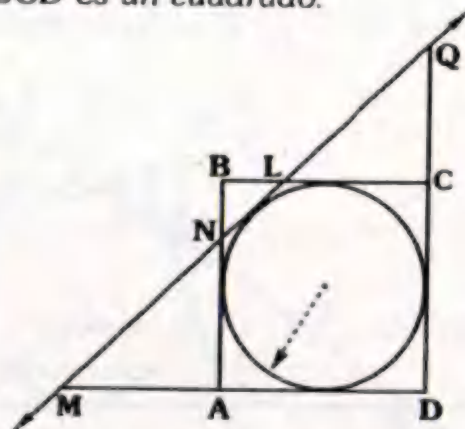


- Sea  $m\angle MAB = 2\alpha$  y  $m\angle BAD = 2\theta$   
 $\Rightarrow \alpha + \theta = 90^\circ$
- Para el  $\triangle AMN$ : O es excentro  
 $\Rightarrow m\angle MON = \alpha$
- Para el  $\triangle LCQ$ : O es excentro  
 $\Rightarrow m\angle LOQ = \theta$
- Para el  $\triangle NBL$ :  $m\angle NOL = 90^\circ - \alpha = \theta$
- En el  $\triangle NOQ$ :  $\overline{OL}$  y  $\overline{OM}$  son bisectriz interior y exterior.



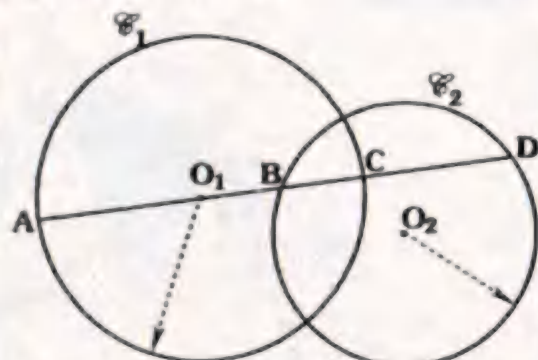
**Observación**

El teorema anterior es válido si ABCD es un cuadrado.



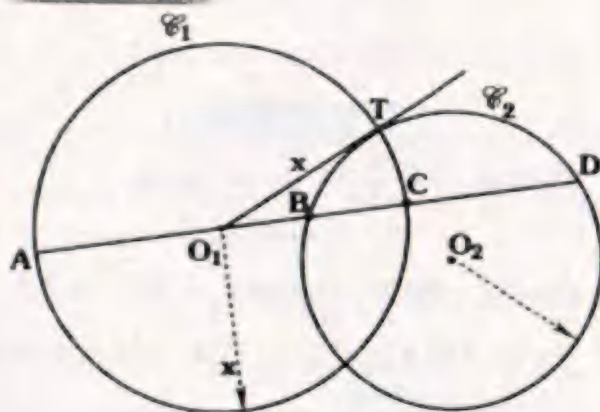
Se cumple que: M, N, L y Q forman una cuaterna armónica.

7 En el gráfico,  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  son circunferencias ortogonales.



Se cumple que A, B, C y D forman una cuaterna armónica.

**Prueba**



Como  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  son ortogonales entonces  $\overline{O_1T}$  es tangente a  $\mathcal{C}_2$ .

Sea  $AC = 2x$

Por teorema de la tangente:  $x^2 = (O_1B)(O_1D)$

$$\Rightarrow \frac{x}{O_1B} = \frac{O_1D}{x}$$

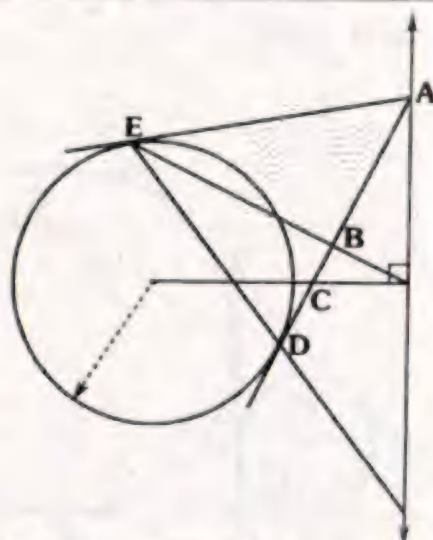
$$\Rightarrow \frac{x + O_1B}{x - O_1B} = \frac{O_1D + x}{O_1D - x}$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$$

**Nota**

Los siguientes casos quedan como ejercicio para el lector:

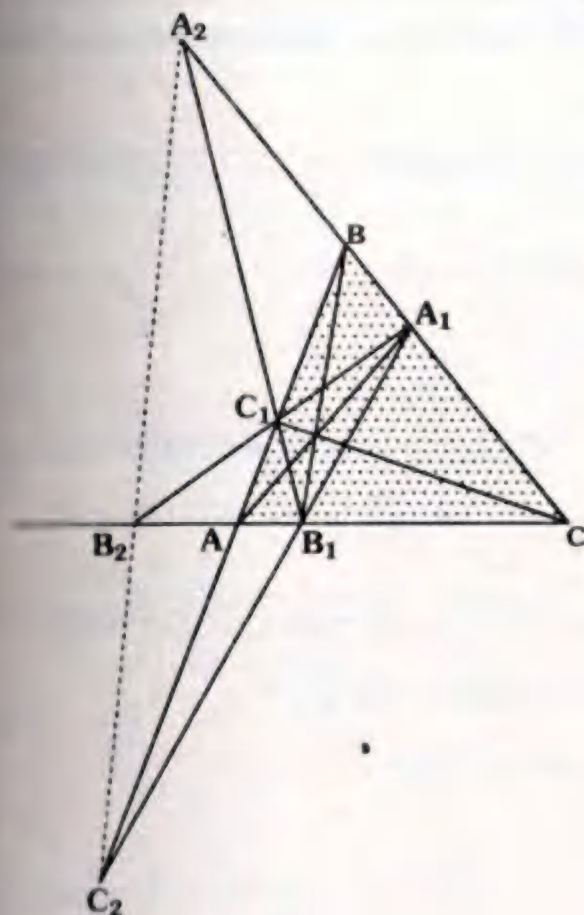
\*1



E y D son puntos de tangencia entonces A, B, C y D forman una cuaterna armónica.

\*2 Para el  $\triangle ABC$ , H es ortocentro, G es baricentro, O es circuncentro y  $O_9$ , es el centro de la circunferencia de los nueve puntos. Se cumple que H, G,  $O_9$  y O forman una cuaterna armónica.

### TEOREMA



En el gráfico, se cumple:

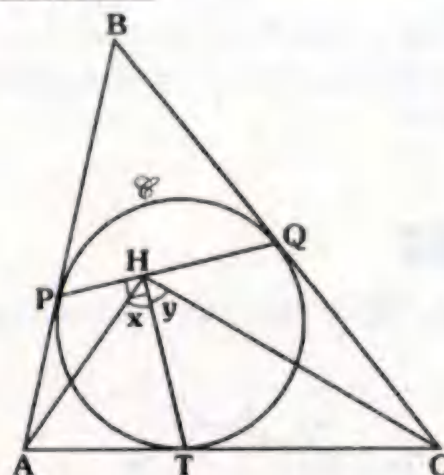
$A_2, B_2$  y  $C_2$  son colineales

#### Prueba

Basta notar que  $B_2, A, B_1$  y  $C$  es una cuaterna armónica entonces el conjunto de rayos  $\overrightarrow{C_2B_2}, \overrightarrow{C_2A}, \overrightarrow{C_2B_1}$  y  $\overrightarrow{C_2C}$  forman un haz armónico.

Como  $C, A_1, B$  y  $A_2$  forman una cuaterna armónica entonces  $\overrightarrow{C_2B_2}$  pasa por  $A_2$ .

### TEOREMA



En el gráfico,  $\odot$  es la circunferencia inscrita.

Se cumple:  $x = y$

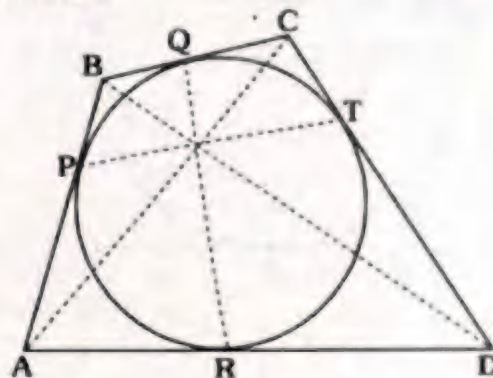
#### Prueba

- Si  $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$  es obvio.
- Si  $\overline{PQ} \nparallel \overline{AC}$ , la prolongación de  $\overline{QB}$  corta a  $\overline{CA}$  en  $M$ , entonces:  $M, A, T$  y  $C$  forma una cuaterna armónica, como  $m\angle MHT = 90^\circ$  entonces por teorema:

$$x = y$$

### TEOREMA DE NEWTON

En el gráfico, el cuadrilátero  $ABCD$  es circunscrito.



Se cumple que  $\overline{AC}, \overline{BD}, \overline{PT}$  y  $\overline{RQ}$  son concurrentes.

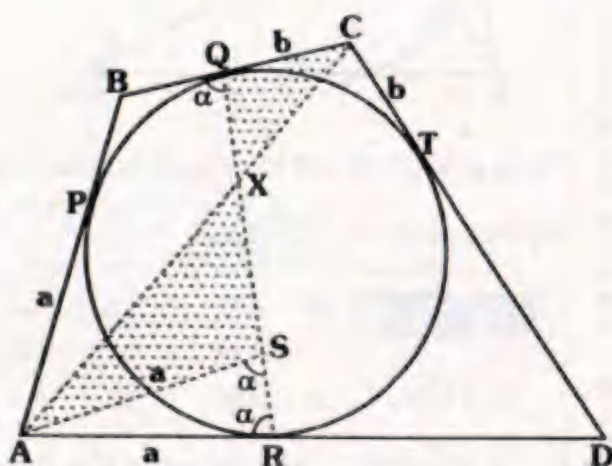


**Prueba**

Hay muchas formas de demostrar el teorema (una manera muy elegante es con potencia y eje radical, lo cual desarrollaremos en el libro N° 10), daremos una prueba sintética analizando por partes.

**PASO 1**

Se traza  $\overline{AC}$  y  $\overline{QR}$  :  $(\overline{AC} \cap \overline{QR} = \{X\})$



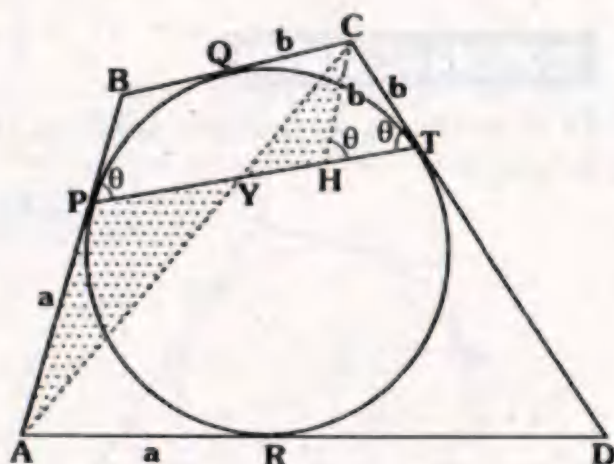
- Como  $m\angle ARQ = m\angle BQR = \alpha$ , se ubica S en  $\overline{QR}$  tal que  $m\angle ASR = \alpha$

$$\Rightarrow \overline{AS} \parallel \overline{QC}$$

- $\triangle AXS \sim \triangle CXQ \Rightarrow \frac{AX}{XC} = \frac{a}{b} \quad \dots (I)$

**PASO 2**

Ahora tracemos  $\overline{AC}$  y  $\overline{PT}$  :  $(\overline{AC} \cap \overline{PT} = \{Y\})$



- En forma similar a lo anterior:

$$\frac{AY}{YB} = \frac{a}{b} \quad \dots (II)$$

- De (I) y (II):  $X=Y$   
Entonces  $\overline{PT}$  y  $\overline{QR}$  se cortan en un punto de la diagonal  $\overline{AC}$ .
- Si hacemos un procedimiento análogo para  $\overline{BD}$ , se tendrá que  $\overline{PT}$  y  $\overline{QR}$  se cortan en  $\overline{BD}$ .

$\therefore \overline{AC}, \overline{BD}, \overline{PT}$  y  $\overline{QR}$  concurren.

## GEOMETRÍA DE MASAS

Es una herramienta muy útil en problemas que tengan que ver especialmente con razones de segmentos.

### DEFINICIÓN DE CENTRO DE MASAS

En un plano ubicamos los puntos  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$  a los cuales se les va asociar las masas  $m_1, m_2, \dots, m_n$  respectivamente, el centro de masa es el punto  $O$  talque:

$$m_1 \overrightarrow{OX_1} + m_2 \overrightarrow{OX_2} + m_3 \overrightarrow{OX_3} + \dots + m_n \overrightarrow{OX_n} = \vec{0} \quad (\text{vector nulo})$$

Veamos el caso en que  $n=2$ :



$$O \text{ es centro de masa} \Rightarrow m_1 \overrightarrow{OX_1} + m_2 \overrightarrow{OX_2} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow m_1 \overrightarrow{OX_1} = -m_2 \overrightarrow{OX_2}, \text{ considerando } m_1 > 0 \text{ y } m_2 > 0$$

$\Rightarrow$  Los vectores  $\overrightarrow{OX_1}$  y  $\overrightarrow{OX_2}$  tienen sentidos contrarios.

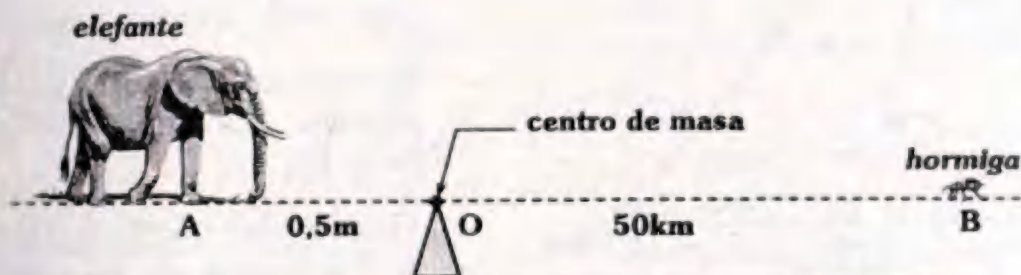
$$\text{Tomando módulos: } m_1 |\overrightarrow{OX_1}| = m_2 |\overrightarrow{OX_2}| \Rightarrow$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{|\overrightarrow{OX_2}|}{|\overrightarrow{OX_1}|} = \frac{OB}{OA}$$

### Observación

- Si  $m_1 = m_2 \Rightarrow O$  es punto medio de  $\overline{AB}$ .
- Si  $m_1 \neq m_2 \Rightarrow OA$  y  $OB$  son proporcionales a  $m_2$  y  $m_1$  es decir  $OA = km_2$  y  $OB = km_1$ , si  $m_1 > m_2 \Rightarrow OB > OA$ , el centro de masa está más cerca de A.

Así tenemos:

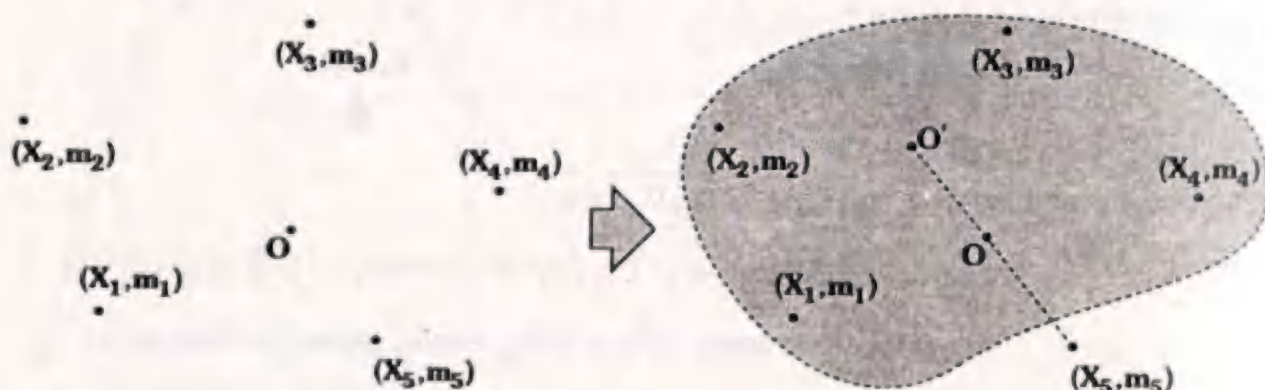




## TEOREMAS

Enunciamos los siguientes teoremas sin demostración

- El centro de masa de cualquier sistema de puntos existe y es único.
- El centro de masa está determinado por los valores de las masas a que pertenece.
- Para cualquier sistema de puntos, si el centro de masa está dado (o deseamos que *fuese* algún punto conveniente) se pueden buscar valores de masa tales que la posición de dicho centro no varíe.
- **(Teorema del agrupamiento de puntos)** El centro de masa de un sistema de puntos no varía si un grupo de puntos del sistema se sustituye por un punto, en el cual está su centro de masa y al cual se le asocia una masa igual a la suma de masas de esos puntos.



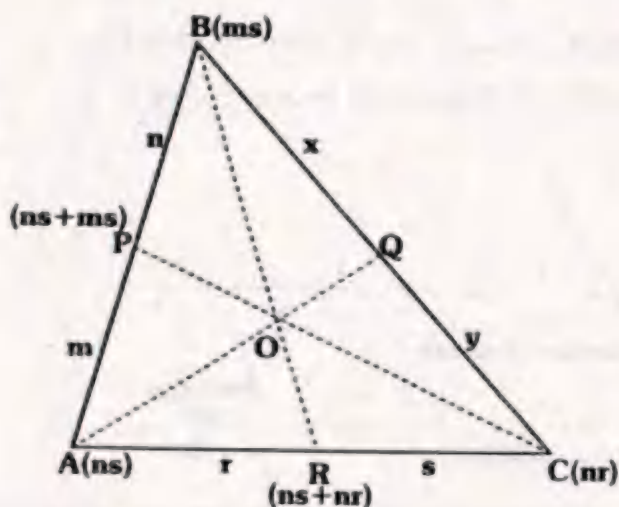
O: centro de masa de los puntos  $X_1, X_2, X_3, X_4$  y  $X_5$ .

O': centro de masa de  $X_1, X_2, X_3$  y  $X_4$  se le asocia la masa:  $m_1 + m_2 + m_3 + m_4$

O: centro de masa de O' y  $X_5$

## APLICACIONES

### APLICACIÓN 1



- Como primera aplicación veamos una prueba sencilla del teorema de Ceva y de Van Aubel.
- Ubiquemos en A, B y C masas "ns", "ms" y "nr" respectivamente.
- El centro de masa de A y C es R, luego el centro de masa de B y R están en la línea  $\overline{BR}$ .
- El centro de masa de A y B está en P y de P y C está en la línea  $\overline{CP}$ .

Se concluye que el centro de masa está en la intersección de  $\overline{BR}$  y  $\overline{CP}$  (O es centro de masa del sistema)

Finalmente el centro de masa de B y C debe estar en Q pues debe estar en la línea  $\overline{AO}$ .

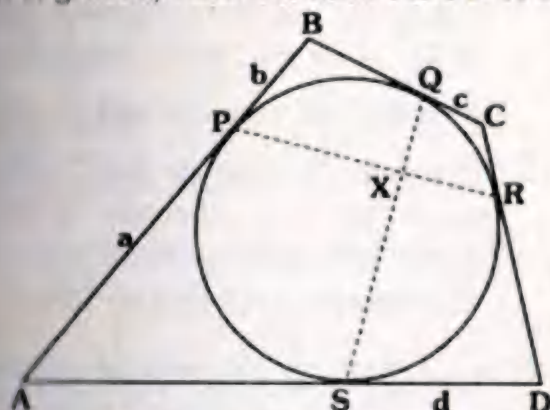
$$\Rightarrow \frac{|QB|}{|QC|} = \frac{nr}{ms} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{nr}{ms} \quad \therefore xms = ynr$$

Ahora veamos la prueba del teorema de Van Aubel.

$$\text{Como el centro de masa es O} \Rightarrow \frac{|OB|}{|OR|} = \frac{ns + nr}{ms} \Rightarrow \frac{|OB|}{|OR|} = \frac{n}{m} + \frac{\frac{x}{y}nr}{ms} = \frac{n}{m} + \frac{x}{y}$$

## APLICACIÓN 2

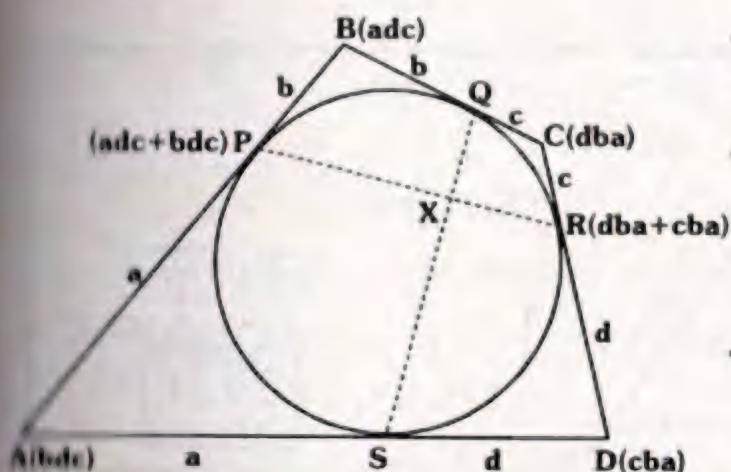
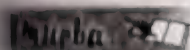
En el gráfico; el cuadrilátero ABCD es circunscrito.



Se cumple:

$$\frac{|PX|}{|XR|} = \frac{ab(c+d)}{cd(a+b)}$$

$$\frac{|QX|}{|XS|} = \frac{bc(a+d)}{ad(b+c)}$$



- Se ubica en A, B, C y D masas de  $abc$ ,  $adc$ ,  $dba$  y  $cba$  respectivamente.
- Luego el centro de masa de A y B está en P, de C y D está en R, luego el centro de masa del sistema está en  $\overline{PR}$ .
- Análogamente el centro de masa del sistema está en  $\overline{QS}$  el centro de masa del sistema está en  $\overline{PR} \cap \overline{QS} = \{X\}$

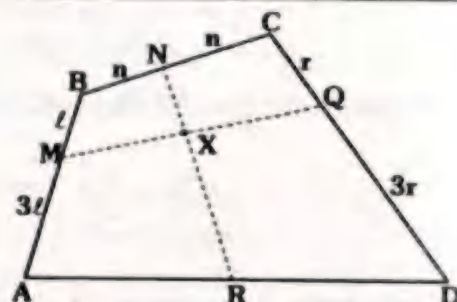


Finalmente:  $\frac{|XP|}{|XR|} = \frac{dba + cba}{adc + bdc} \Rightarrow \frac{|XP|}{|XR|} = \frac{ab(c + d)}{cd(a + b)}$

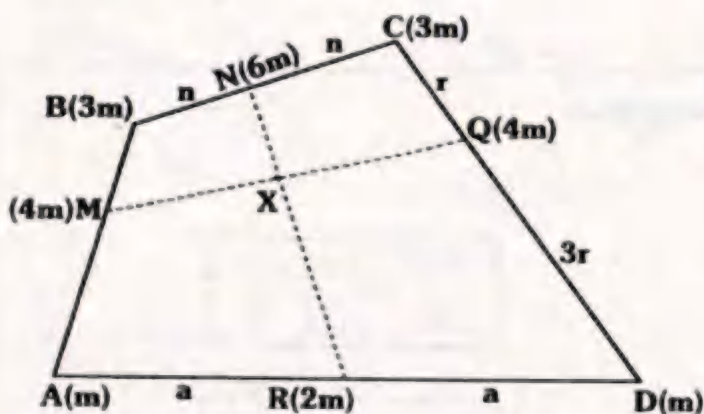
Análogamente:  $\frac{|XQ|}{|XS|} = \frac{bc(a + d)}{ad(b + c)}$

En el gráfico, se cumple:

$$MX = XQ \quad \text{y} \quad \frac{NX}{XR} = \frac{1}{3}$$



**Prueba**

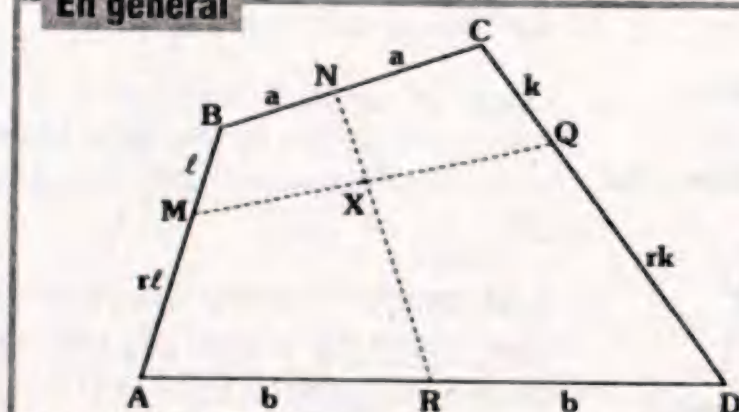


- Se ubican en A, B, C y D masas "m", "3m", "3m" y "m" respectivamente.
- El centro de masa de A y B es M, con masa "4m"; el centro de masa de C y D es Q con masa "4m"; luego el centro de masa del conjunto está en  $\overline{MQ}$ .
- El centro de masa de B y C está en N con masa "6m"; el centro de masa de A y D está en R con masa "2m", luego el centro de masa está en  $\overline{NR}$ .

- Como el centro de masa está en  $\overline{MQ}$  y en  $\overline{NR}$  entonces el centro de masa es X.

Finalmente:  $\frac{|XM|}{|XQ|} = \frac{4m}{4m} \Rightarrow MX = XQ \quad \text{y} \quad \frac{|NX|}{|XQ|} = \frac{2m}{6m} \Rightarrow \frac{NX}{XQ} = \frac{1}{3}$

**En general**



Se cumple:

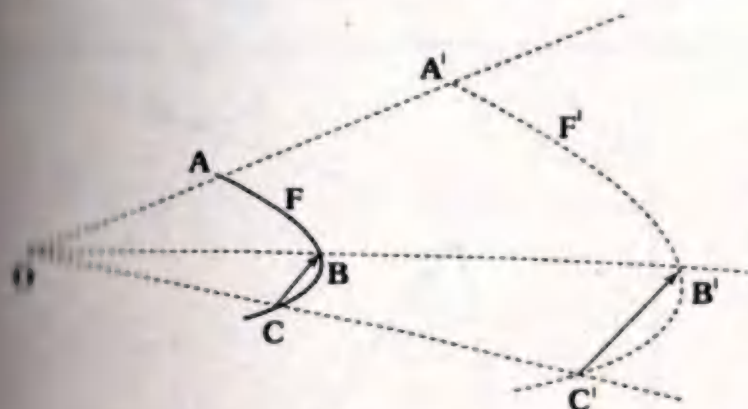
$$MX = XQ$$

$$\frac{NX}{XR} = \frac{1}{r}$$

## HOMOTECIA

Es una transformación geométrica del tipo ISOMORFA, es decir sólo va a cambiar las proporciones de la figura más no la forma.

### HOMOTECIA DIRECTA



O: Centro de homotecia directa

k: razón de la homotecia directa ( $k > 0$ )

A y A': Puntos homotéticos si:

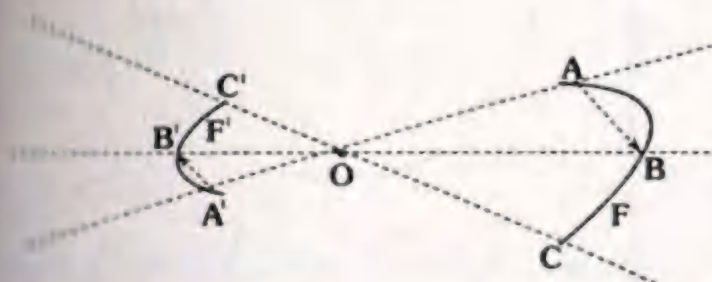
$$\frac{OA'}{OA} = k$$

Observación:

Como  $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = k$ , luego tendremos  $\overline{CB} \parallel \overline{C'B'}$  y  $C'B' = k(CB)$ .

Los segmentos  $\overline{CB}$  y  $\overline{C'B'}$  son homotéticos y las figuras F y F' son homotéticas.

### HOMOTECIA INVERSA



O: Centro de homotecia inversa

k: razón de la homotecia inversa ( $k < 0$ )

A y A' son homotéticos si:

$$\frac{OA'}{OA} = k$$

También los pares B - B' y C - C' son puntos homotéticos, luego  $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ ,  $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$  y  $\overline{A'C'} \parallel \overline{CA}$ .

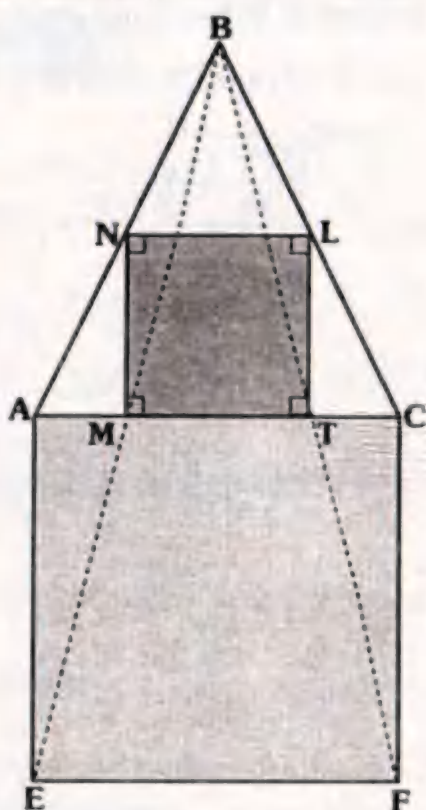
$\overline{A'B'}$  y  $\overline{AB}$  son segmentos homotéticos.



**Observaciones**

- Las figuras homotéticas son semejantes ( $F \sim F'$ )
- Si  $|k| > 1$  entonces la figura aumenta de tamaño; si  $|k| < 1$  la figura se reduce de tamaño; si  $|k| = 1 \Rightarrow F \equiv F'$
- Dos puntos homotéticos son colineales con el centro de homotecia.
- Las razones de los segmentos se está considerando las razones de segmentos dirigidos.

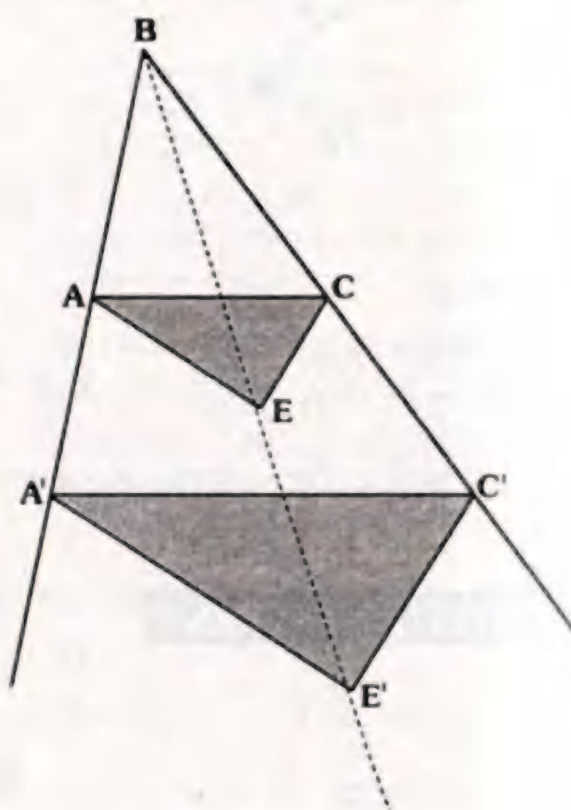
**APLICACIÓN**



Si:  $EACF$  y  $MNLT$  son cuadrados

$\Rightarrow$  Dichos cuadrados son homotéticos cuyo centro de homotecia es  $B$ .

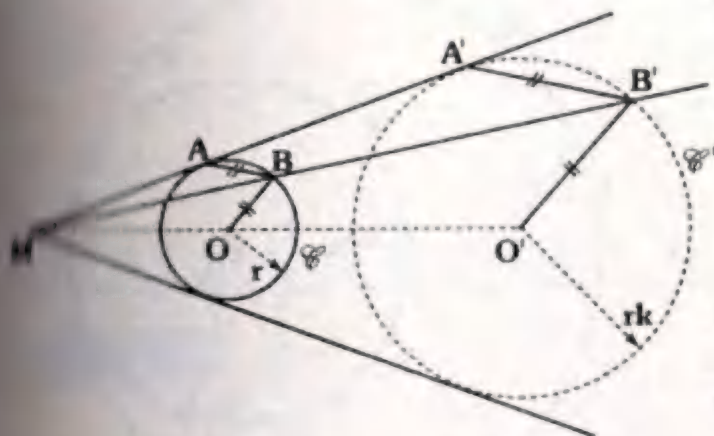
$\Rightarrow E, M$  y  $B$  son colineales lo mismo que  $F, T$  y  $B$  colineales.



Si:  $\overline{AC} \parallel \overline{A'C'}$ ,  $\overline{AE} \parallel \overline{A'E'}$  y  $\overline{CE} \parallel \overline{C'E'}$

$\Rightarrow$  Los triángulos  $AEC$  y  $A'E'C'$  son homotéticos y los puntos  $E'$  y  $E$  son homotéticos entonces  $E', E$  y  $B$  son colineales.

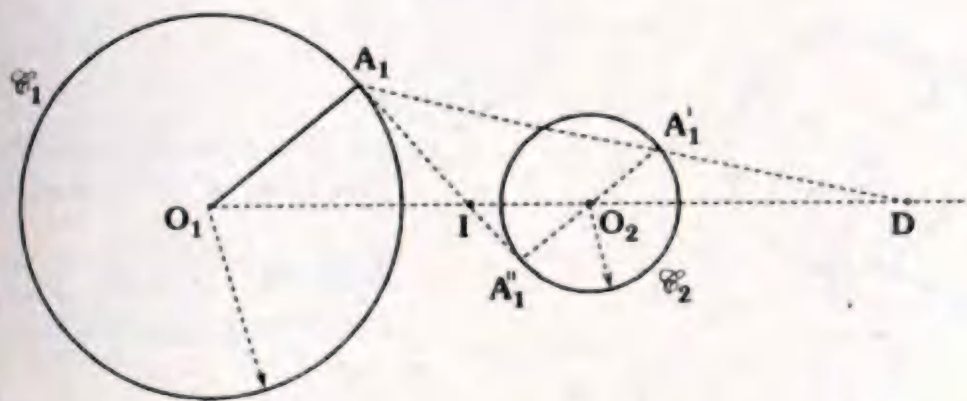
## HOMOTECIA DE CIRCUNFERENCIAS



- Sea la circunferencia  $\mathcal{C}$  de centro  $O$  y sea  $M$  el centro de homotecia.
- $A$  y  $A'$  son puntos homotéticos entonces  $\frac{OA'}{OA} = k$  luego el homotético de  $\mathcal{C}$  es  $\mathcal{C}'$ , cuyo radio es " $rk$ ".
- Notemos que  $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$  y  $\overline{OB} \parallel \overline{O'B'}$ .
- Lo anterior nos da los criterios para hallar los centros de homotecia de dos figura homotéticas.

## UBICACIÓN DEL CENTRO DE HOMOTECIA DADAS DOS CIRCUNFERENCIAS

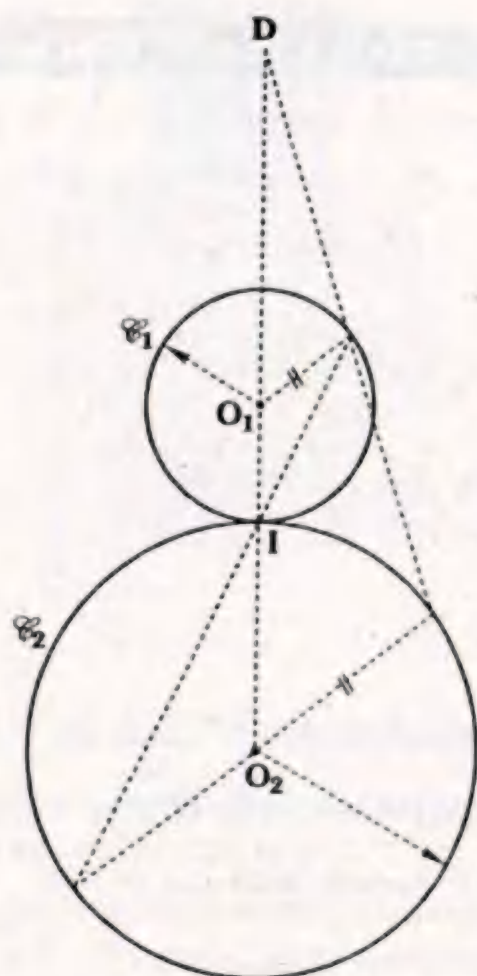
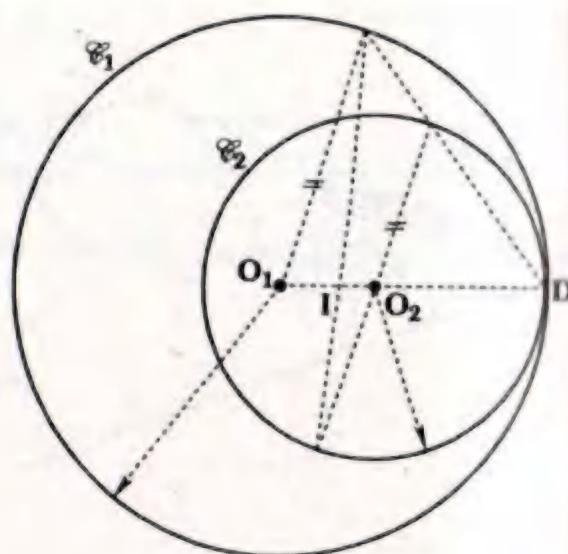
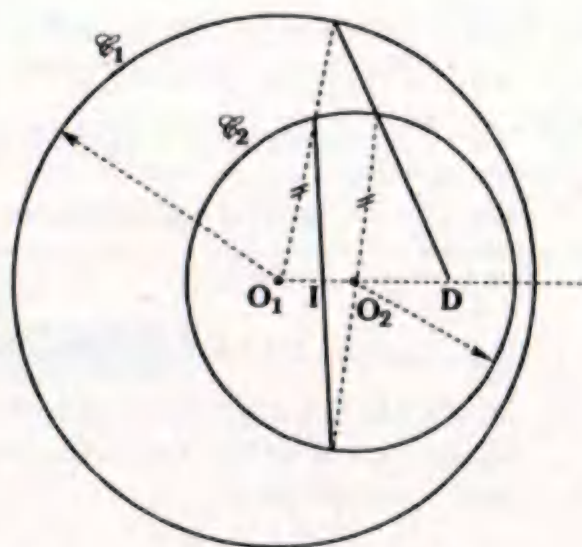
Consideramos las circunferencias de radios diferentes y no concéntricas  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  y de centros  $O_1$  y  $O_2$  respectivamente.



- Los centros de homotecia directa e inversa se ubicarán en la línea de los centros.
- En  $\mathcal{C}_1$  se ubica  $A_1$  y en  $\mathcal{C}_2$  se traza el diámetro  $\overline{A_1'A_1''}$  tal que  $\overline{O_1A_1} \parallel \overline{A_1''A_1'}$ .
- La intersección de  $\overline{A_1A_1'}$  y  $\overline{O_1O_2}$  nos da el centro de homotecia directa:  $D$ .
- La intersección de  $\overline{O_1O_2}$  con  $\overline{A_1A_1''}$  es el centro de homotecia inversa:  $I$ .



Veamos otras posibilidades:



- I y D centros de homotecia inversa y directa de  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  respectivamente.
- También;  $O_1$ , I,  $O_2$  y D forman una CUATERNA ARMÓNICA.

**TEOREMA**

Sean tres circunferencias coplanarias de radios diferentes:  $\mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{C}_2$  y  $\mathcal{C}_3$  los cuales son no concéntricas. Sean  $D_{ij}$  e  $I_{ij}$  los centros de homotecia de  $\mathcal{C}_i$  y  $\mathcal{C}_j$ .

Se cumple:

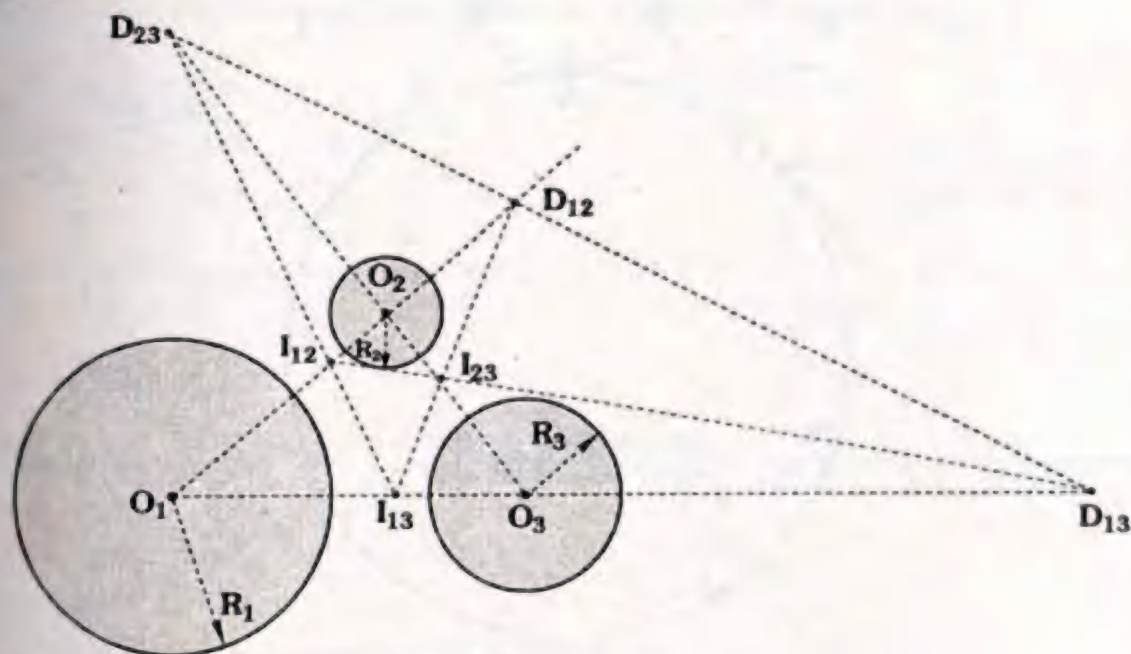
$D_{12}$ ,  $D_{23}$  y  $D_{13}$  son colineales

$D_{12}$ ,  $I_{23}$  e  $I_{13}$  son colineales

$I_{12}$ ,  $D_{23}$  e  $I_{13}$  son colineales

$I_{12}$ ,  $I_{23}$  y  $D_{13}$  son colineales

**Figura**



Los centros de homotecia, cumplen:

$$\frac{D_{ij}O_i}{D_{ij}O_j} = \frac{R_i}{R_j} \text{ y } \left| \frac{I_{ij}O_i}{I_{ij}O_j} \right| = \frac{R_i}{R_j} \text{ para: } i \neq j, i = 1, 2, 3 \text{ y } j = 1, 2, 3$$

Observemos que para el triángulo  $O_1O_2O_3$  se cumple:

$$\frac{O_1D_{12}}{D_{12}O_2} \cdot \frac{O_2D_{23}}{D_{23}O_3} \cdot \frac{O_3D_{13}}{D_{13}O_1} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_2}{R_3} \cdot \frac{R_3}{R_1} = 1 \Rightarrow D_{12}, D_{23} \text{ y } D_{13} : \text{colineales}$$

$$\frac{O_1I_{12}}{I_{12}O_2} \cdot \frac{O_2I_{23}}{I_{23}O_3} \cdot \frac{O_3D_{13}}{D_{13}O_1} = 1 \Rightarrow I_{12}, I_{23} \text{ y } D_{13} : \text{colineales}$$

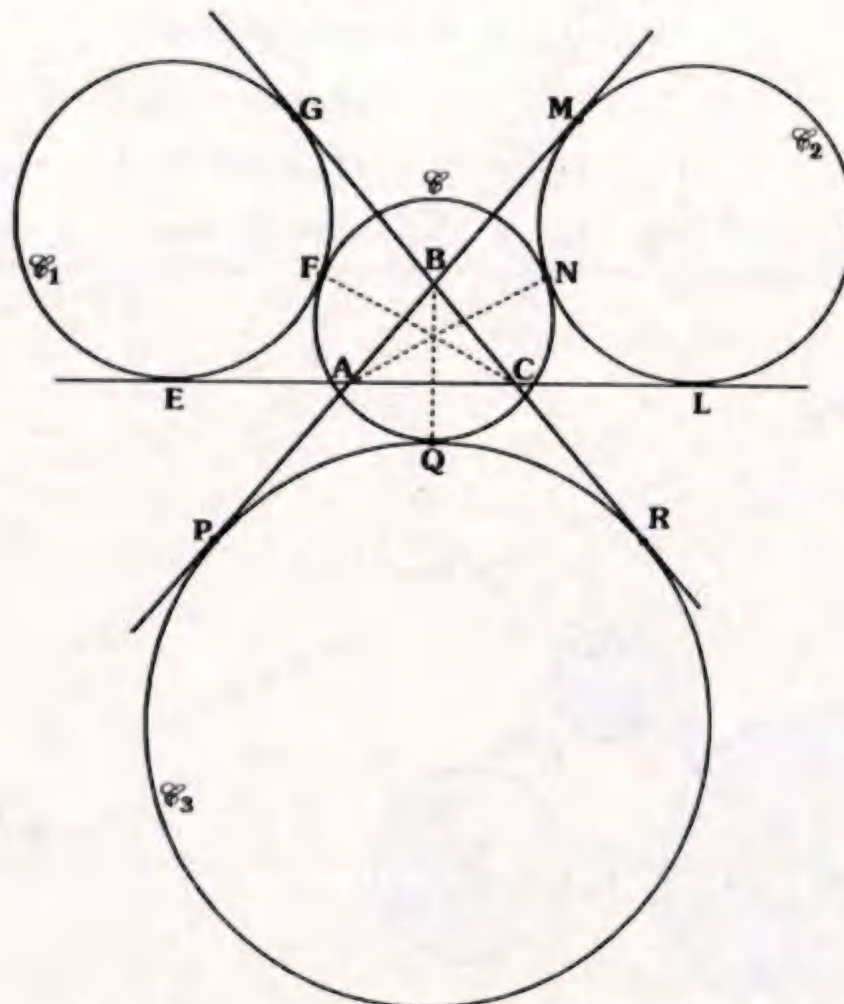
Análogamente para las demás ternas.



**APLICACIÓN**

Como aplicación del teorema anterior veamos:

En el gráfico, E, F, G, M, N, L, R, Q y P son puntos de tangencia



Se cumple:  $\overline{AN}$ ,  $\overline{CF}$  y  $\overline{BQ}$  concurren

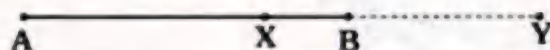
**Prueba**

Se traza la circunferencia inscrita: K del  $\triangle ABC$ .

- Analicemos  $C_1$ ,  $C$  y K:
    - F es centro de homotecia inversa de  $C$  y  $C_1$
    - C es centro de homotecia directa de  $C_1$  y K
    - X es centro de homotecia inversa de K y  $C$ $\left. \begin{array}{l} \text{--- F es centro de homotecia inversa de } C \text{ y } C_1 \\ \text{--- C es centro de homotecia directa de } C_1 \text{ y K} \\ \text{--- X es centro de homotecia inversa de K y } C \end{array} \right\} \text{F, C y X: colineales}$
  - Análogamente: N, A y X colineales ; B, Q y X colineales
- $\therefore \overline{AN}$ ,  $\overline{CF}$  y  $\overline{BQ}$  concurren en X.

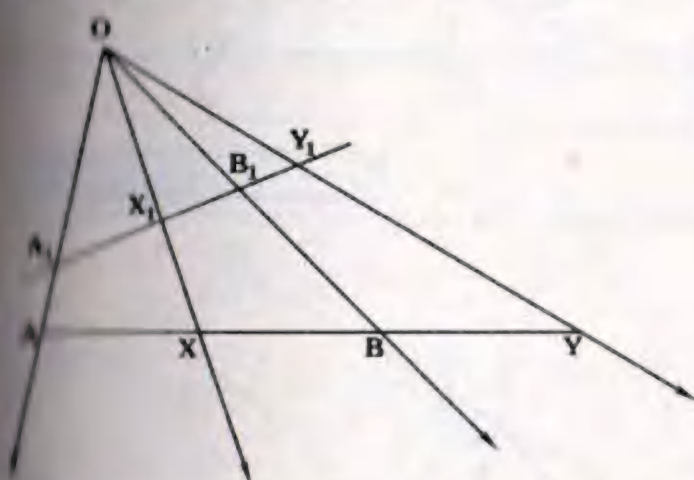
# RAZÓN DOBLE O RAZÓN CRUZADA

Un tema muy importante por sus aplicaciones es el de razón doble, con ello demostraremos fácilmente los teoremas de Pascal, Pappus y Desargues:



Si  $X$  e  $Y$  dividen a  $\overline{AB}$ , se define la razón doble como:  $\frac{AX}{XB} / \frac{AY}{YB}$  y lo denotamos por  $\{ABXY\}$

## RAZÓN DE CUATRO HILERAS



Se denotará por:

$$O - \{ABXY\}$$

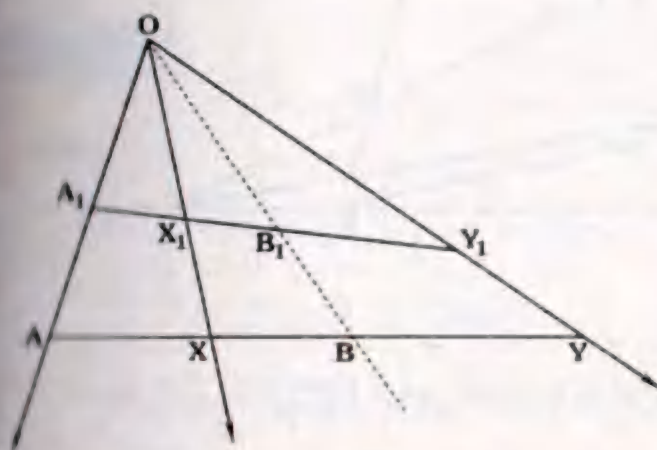
Es fácil verificar que:

$$\{ABXY\} = \frac{\sin AOX}{\sin XOB} / \frac{\sin AOY}{\sin YOY}$$

Luego se deduce:

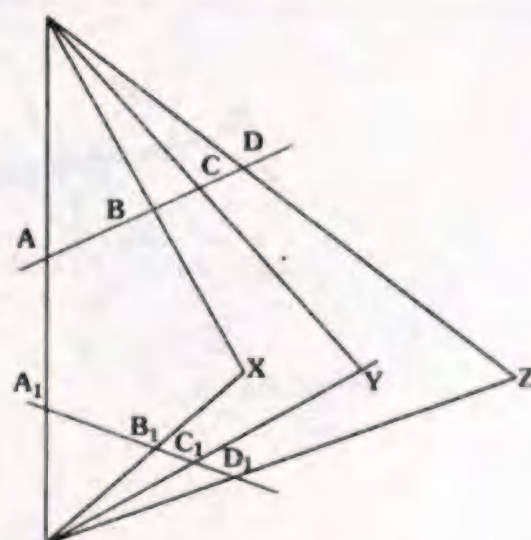
$$\{ABXY\} = \{A_1B_1X_1Y_1\}$$

### Observaciones



$$\text{Si: } \{AXBY\} = \{A_1X_1B_1Y_1\}$$

$\Rightarrow O, B_1$  y  $B$  son colineales

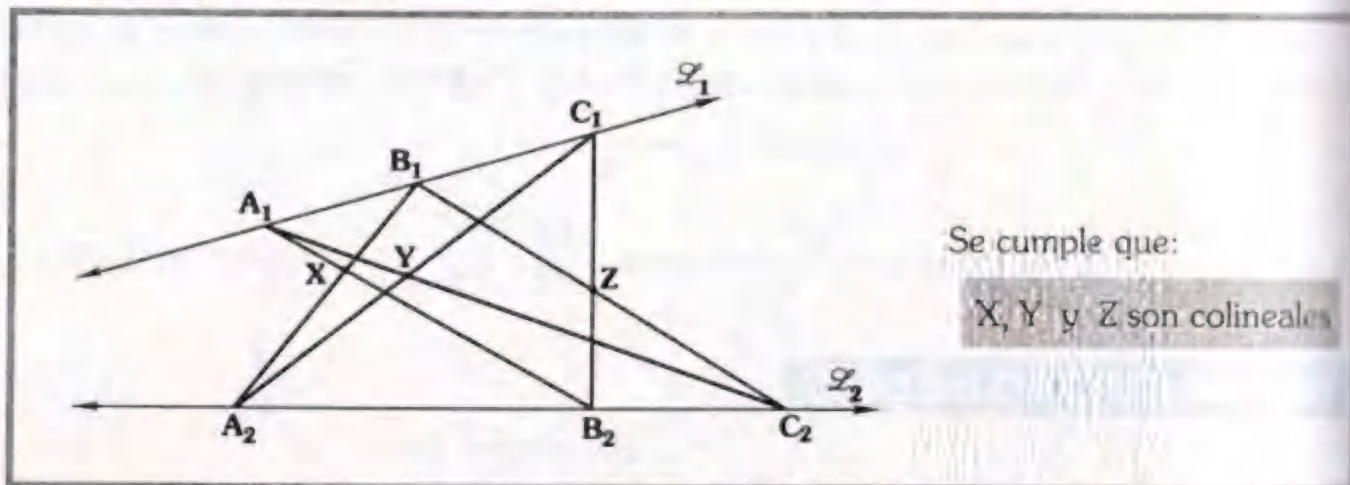


$$\text{Si: } \{ABCD\} = \{A_1B_1C_1D_1\}$$

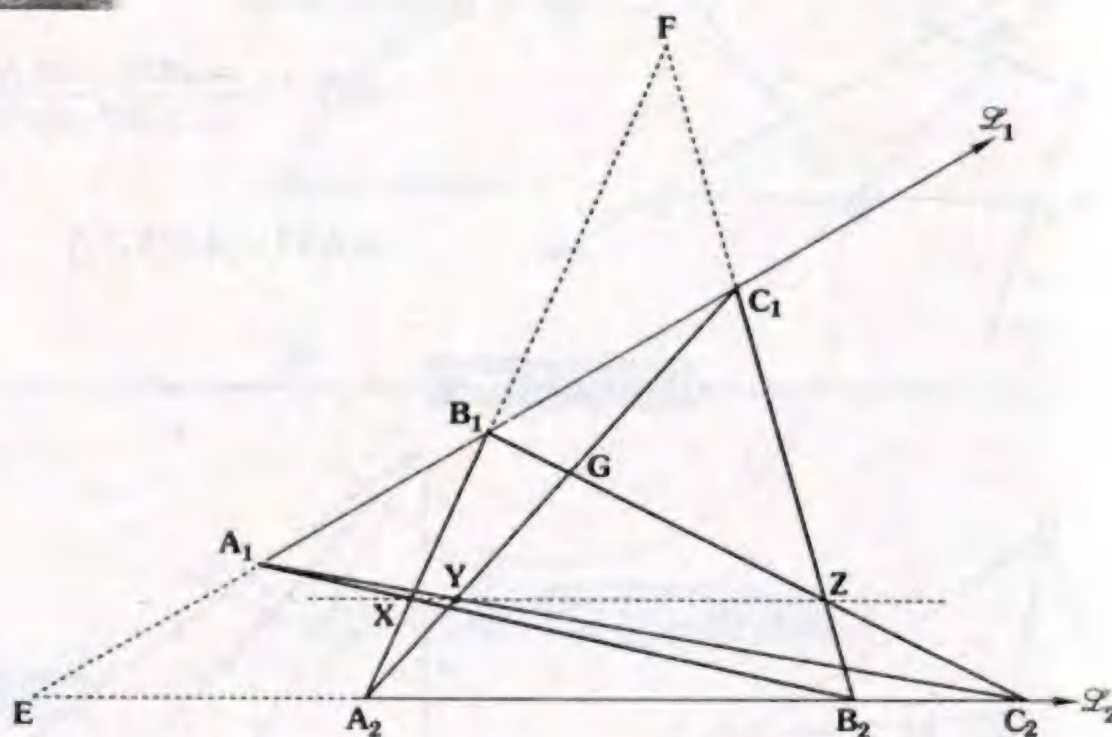
$\Rightarrow X, Y$  y  $Z$  son colineales



# TEOREMA DE PAPPUS



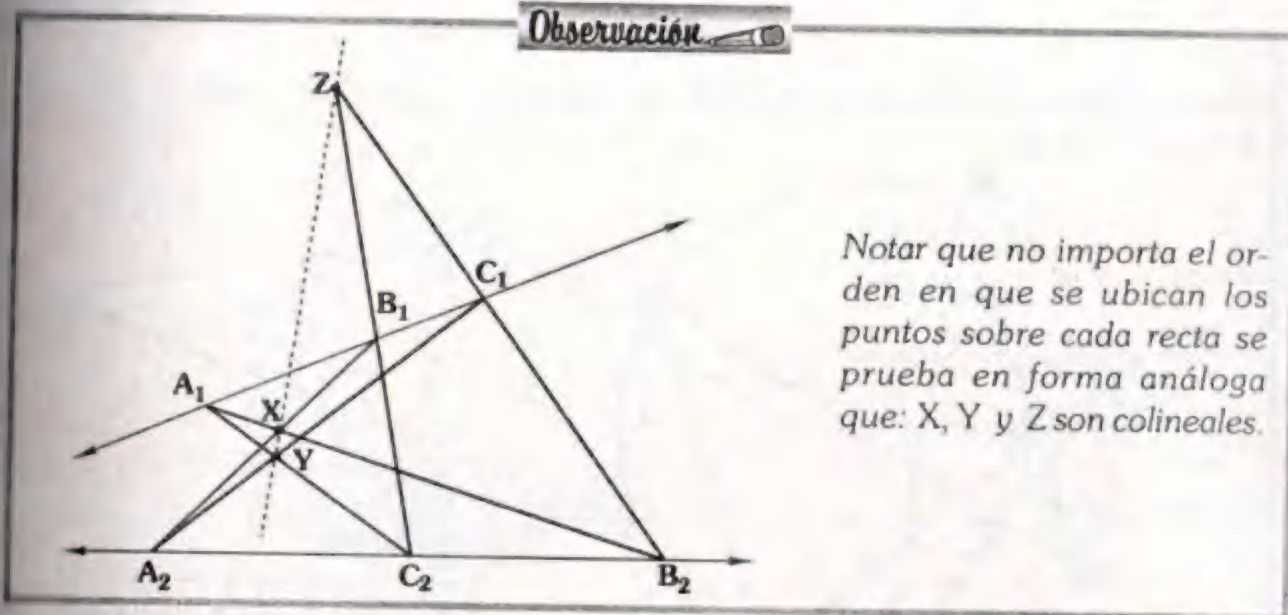
Prueba



Partimos así:

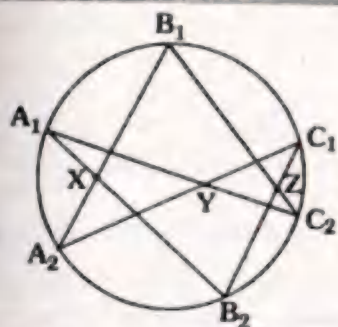
$$\begin{aligned} B_2 \{EA_1B_1C_1\} &= C_2 \{EA_1B_1C_1\} \\ \Rightarrow B_2 \{A_2XB_1F\} &= C_2 \{A_2YGC_1\} \\ \Rightarrow Z \{A_2XB_1F\} &= Z \{A_2YGC_1\} \\ \therefore X, Y \text{ y } Z &\text{ son colineales.} \end{aligned}$$

**Observación**



Notar que no importa el orden en que se ubican los puntos sobre cada recta se prueba en forma análoga que: X, Y y Z son colineales.

**TEOREMA DE PASCAL**



En el gráfico, se cumple:

X, Y, Z son colineales

**Prueba**

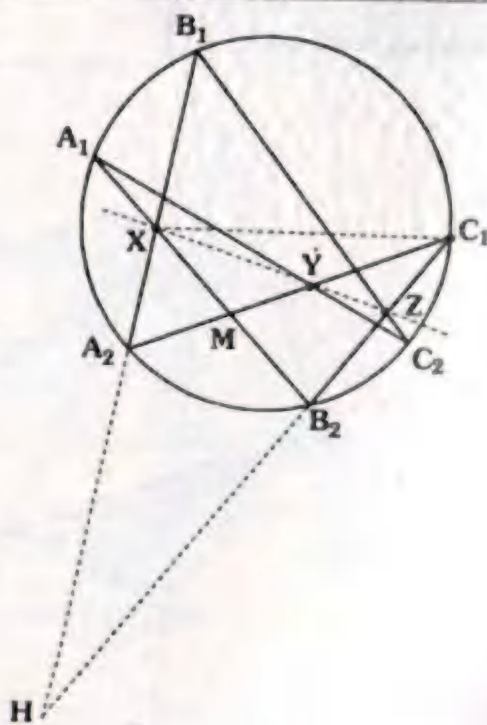
Como:

$$B_1 \{C_1 C_2 B_2 A_2\} = A_1 \{C_1 C_2 B_2 A_2\}$$

$$\Rightarrow \{C_1 Z B_2 H\} = \{C_1 Y M A_2\}$$

$$\Rightarrow X \{C_1 Z B_2 H\} = X \{C_1 Y M A_2\}$$

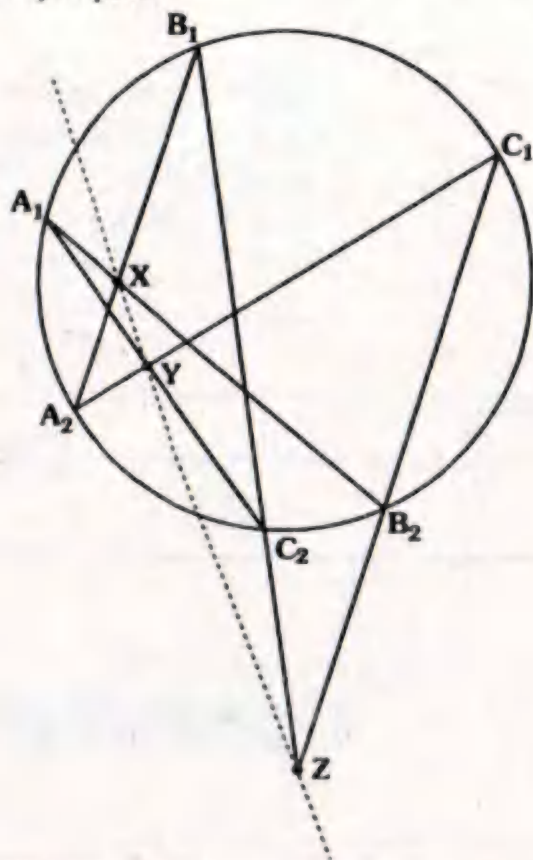
$\therefore$  X, Y y Z son colineales.





**Observación**

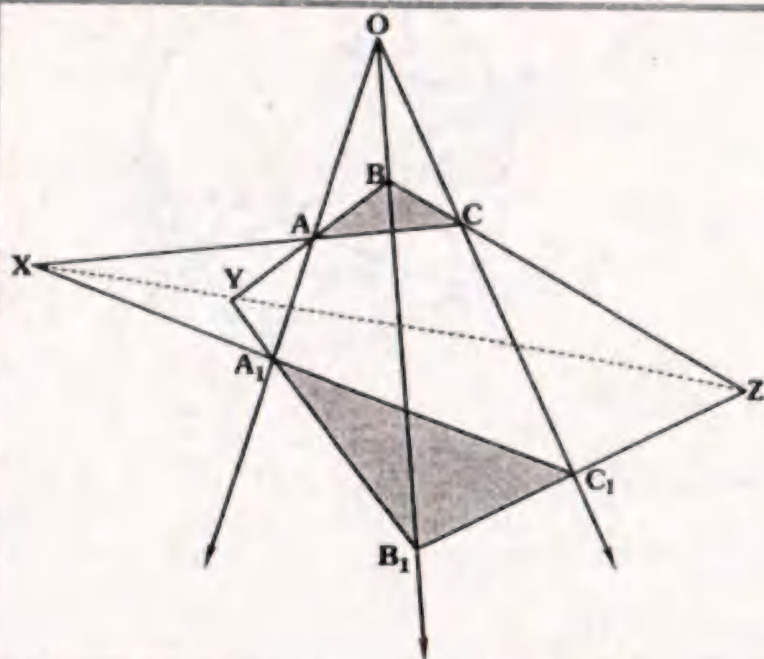
Con las mismas notaciones se prueban muchos casos, variando el orden de los puntos, por ejemplo:



Se cumple:

**X, Y y Z son colineales**

**TEOREMA DE DESARGUES**

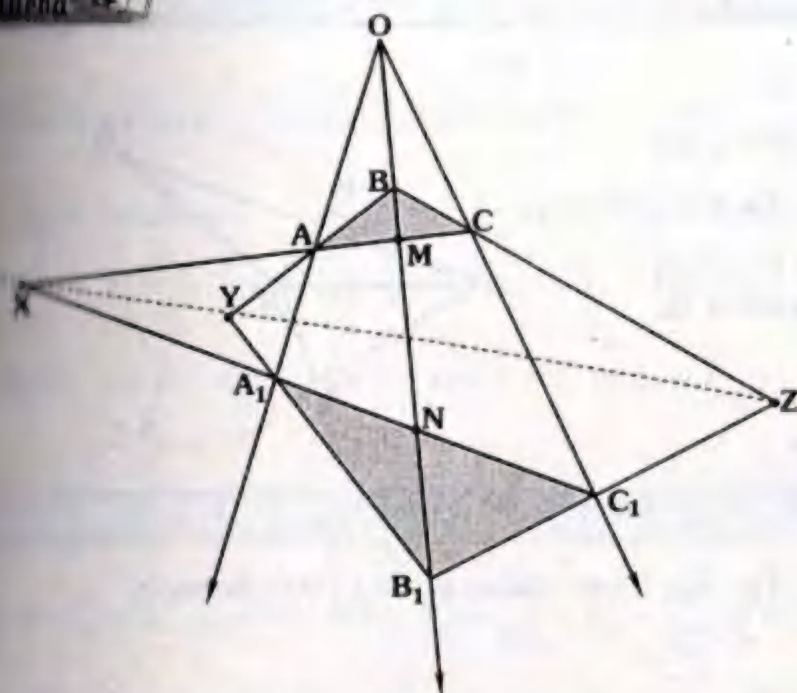


En el gráfico, se cumple:

**X, Y y Z son colineales**

Al punto O se le llama centro de perspectiva de los triángulos ABC y  $A_1B_1C_1$ .

Elleba



Notemos que:

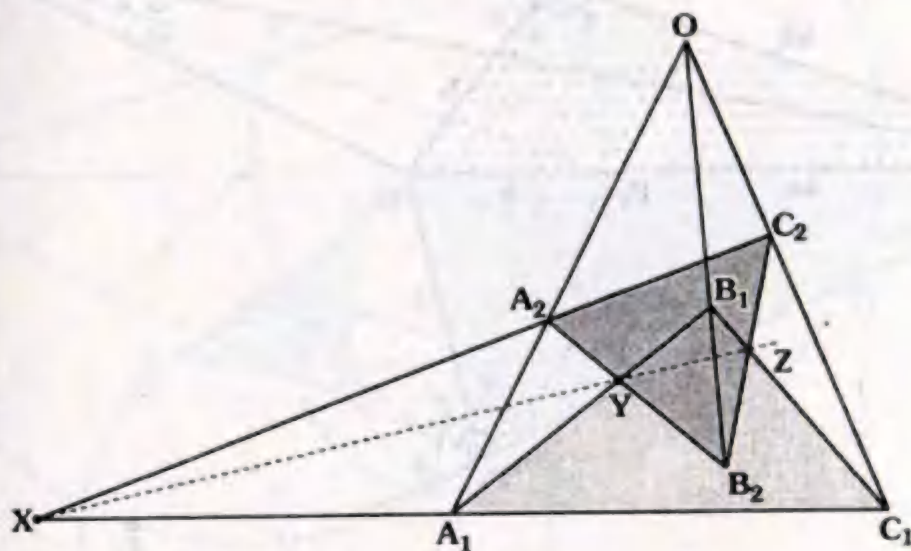
$$O\{XAMC\} = B_1\{XANC_1\}$$

$$\Rightarrow B\{XYMZ\} = B_1\{XYNZ\}$$

$\therefore$  X, Y y Z son colineales.

### Observación

Veamos otras posibilidades:



Se cumple:

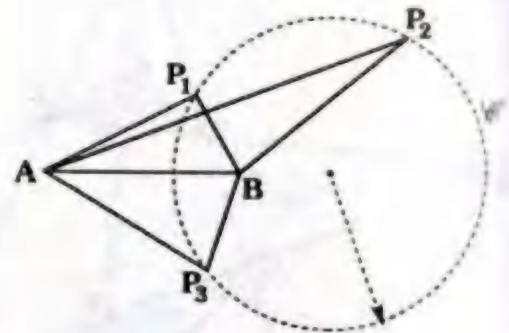
X, Y y Z son colineales.



## CIRCUNFERENCIA DE APOLONIO

### TEOREMA

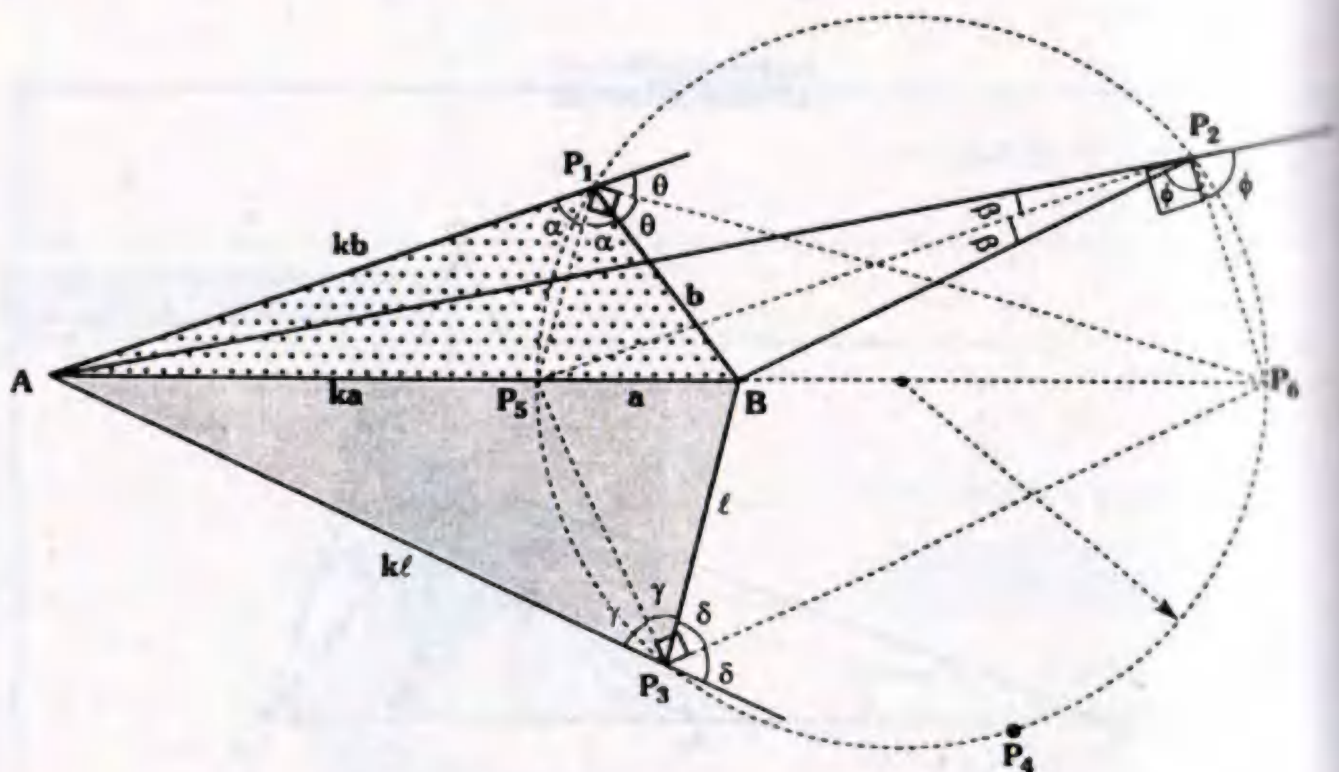
Sea el segmento fijo  $\overline{AB}$  en un plano y sea un punto móvil  $P$  tal que  $\frac{AP}{PB} = k$  ( $k \neq 1$ ), el lugar geométrico que describe  $P$  es una circunferencia, llamada circunferencia de Apolonio o de Similitud.



En el gráfico:  $\frac{AP_1}{P_1B} = \frac{AP_2}{P_2B} = \frac{AP_3}{P_3B} = \dots$

$\Rightarrow$  Los puntos  $P_1, P_2, P_3, \dots$  se ubican en una circunferencia.

**Prueba**



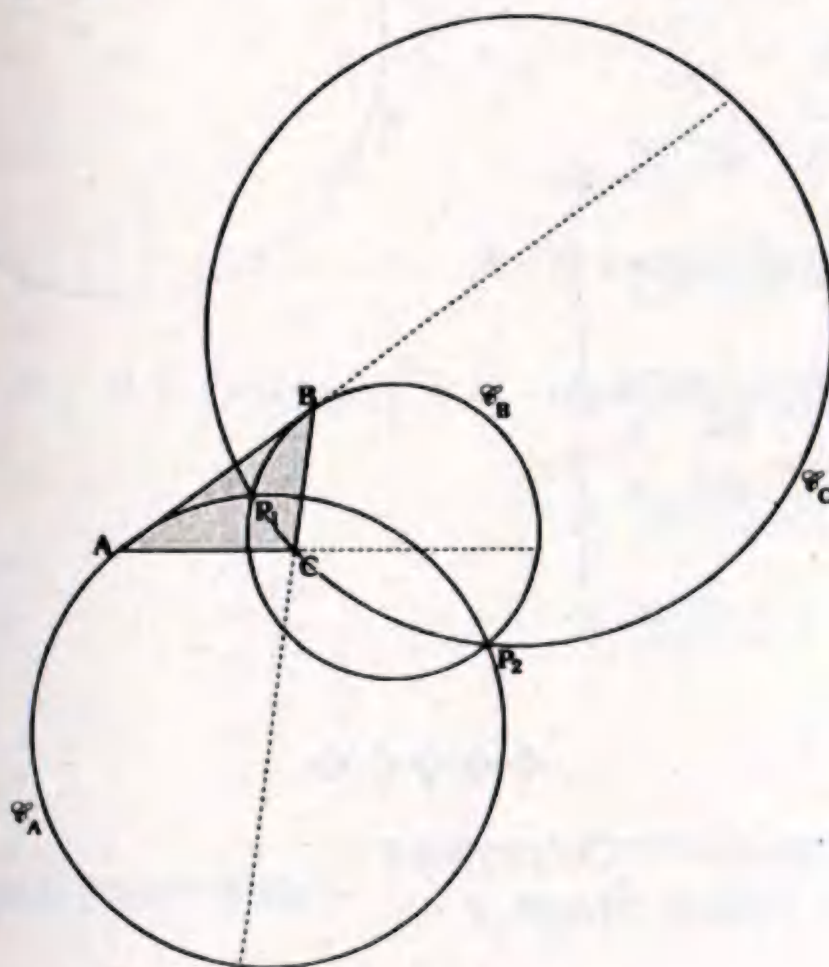
- Se ubica  $P_5$  en  $\overline{AB}$  y  $P_6$  en la prolongación de  $\overline{AB}$  (suponiendo que  $|k| > 1$ ) tal que  $\frac{AP_5}{P_5B} = \frac{AP_6}{P_6B} = k$

3. Luego para todo punto  $P_i \neq P_5$  y  $P_i \neq P_6$  se tendrá que en el  $\Delta AP_iB$ ,  $\overline{P_iP_5}$  y  $\overline{P_iP_6}$  es bisectriz interior y exterior respectivamente, pues:  $\frac{AP_i}{P_iB} = \frac{AP_5}{P_5B} = \frac{AP_6}{P_6B} = k$
4. Luego tendremos:  $m\angle P_5P_1P_6 = m\angle P_5P_2P_6 = m\angle P_5P_3P_6 = 90^\circ$   
 $\Rightarrow P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$  formarán una circunferencia
5. Notar que el centro de la circunferencia está en la recta  $\overline{AB}$  y es el punto medio  $\overline{P_5P_6}$ .

### PUNTO DE APOLONIO

Sea el triángulo escaleno ABC,  $k_1 = \frac{AB}{BC}$ ,  $k_2 = \frac{AC}{CB}$  y  $k_3 = \frac{AB}{AC}$ .

Las circunferencias de Apolonio con respecto a  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{AB}$  cuyas constantes son  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$  respectivamente concurren. El punto de concurrencia se llama punto de Apolonio.





- Para el  $\triangle ABC$ ,  $\mathcal{C}_A$ ,  $\mathcal{C}_B$  y  $\mathcal{C}_C$  son las circunferencias de Apolonio.
- Se cumple:  $\mathcal{C}_A \cap \mathcal{C}_B \cap \mathcal{C}_C = \{P_1, P_2\}$
- $P_1$  y  $P_2$ : Puntos de Apolonio

**Prueba**

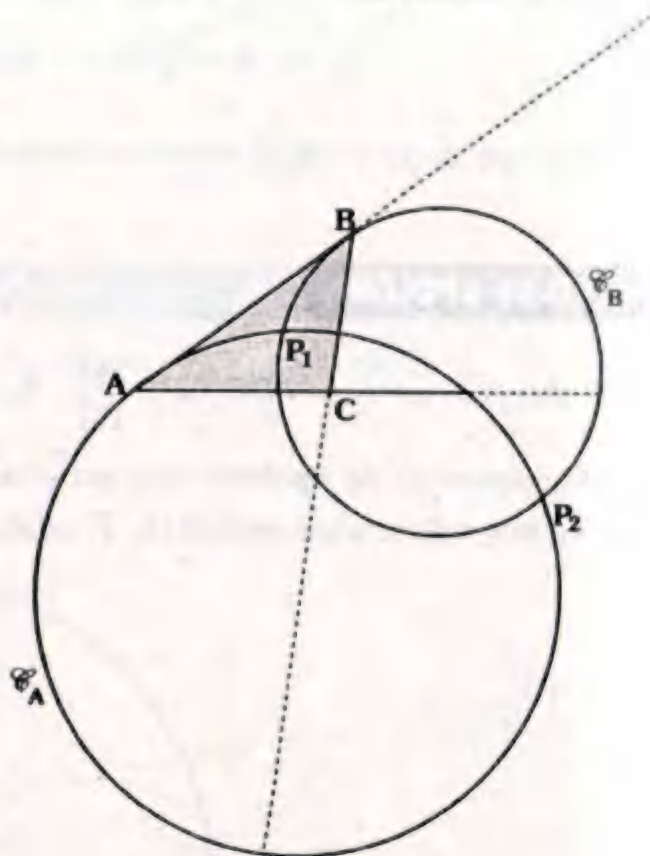
- Sea  $AB=c$ ;  $BC=a$ ;  $AC=b$   $c > b > a$
- $k_1 = \frac{c}{a}$ ;  $k_2 = \frac{b}{a}$  y  $k_3 = \frac{c}{b}$
- $\mathcal{C}_A$ ;  $\mathcal{C}_B$  y  $\mathcal{C}_C$  las circunferencias de Apolonio respecto de  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  y  $\overline{AB}$  cuyas razones son  $k_3$ ,  $k_1$  y  $k_2$  respectivamente.

- Se trazan  $\mathcal{C}_A$  y  $\mathcal{C}_B$  secantes en  $P_1$  y  $P_2$ ,

como  $P_1 \in \mathcal{C}_A \Rightarrow \frac{AP_1}{P_1C} = \frac{c}{a} = k_1$  y

$$P_1 \in \mathcal{C}_B \Rightarrow \frac{BP_1}{P_1C} = \frac{c}{b} = k_3$$

Luego  $\frac{AP_1}{P_1B} = \frac{b}{a} = k_3$ , es decir  $P_1 \in \mathcal{C}_C$



- Por lo tanto las circunferencias  $\mathcal{C}_A$ ,  $\mathcal{C}_B$  y  $\mathcal{C}_C$  concurren en  $P_1$  y  $P_2$  (Pues se prueba análogamente que:  $\frac{AP_2}{P_2B} = \frac{b}{a} = k_3$ )



# **Geometría**

## **ENUNCIADO DE LOS PROBLEMAS RESUELTOS**

- ANUAL
- CEPRE UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO

**PROPORCIONALIDAD  
Y SEMEJANZA**





# Problemas Resueltos

## Ciclo Anual

### PROBLEMA N° 1

En el gráfico,  $\overline{AM} \parallel \overline{BN} \parallel \overline{CP} \parallel \overline{DQ} \parallel \overline{ER}$ ,  
 $MN = 1$ ;  $NP = 2$ ;  $PQ = 3$  y  $QR = 4$ .

Calcule  $\frac{AD}{BD + DE}$

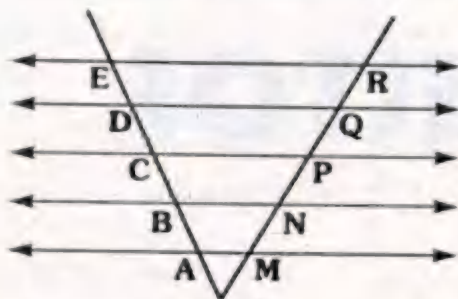
A) 1

B) 2

C) 3

D)  $\frac{2}{3}$

E)  $\frac{3}{2}$



### PROBLEMA N° 2

En el triángulo ABC, se traza la bisectriz interior AN y se ubica M en  $\overline{AB}$  tal que  $4(BN) = 3(NC)$  y  $AM = MN$ . Calcule  $\frac{BM}{AB}$ .

A)  $\frac{3}{4}$

B)  $\frac{7}{3}$

C)  $\frac{3}{7}$

D)  $\frac{4}{3}$

E)  $\frac{4}{7}$

### PROBLEMA N° 3

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo,  
 $\overline{EF} \parallel \overline{AD}$ ,  $PC = 3$  y  $AP = 9$ . Calcule EP.

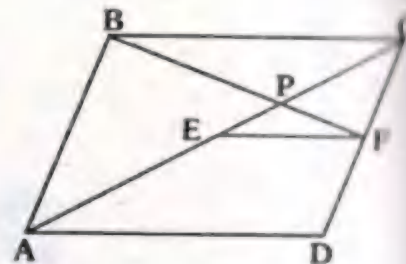
A)  $\frac{1}{2}$

B) 1

C)  $\frac{3}{2}$

D)  $\frac{2}{3}$

E) 2



### PROBLEMA N° 4

En el gráfico,  $\overline{AC} \parallel \overline{NM}$ ,  $BC = 3(CD)$  y  $AE = 2$ . Calcule AB.

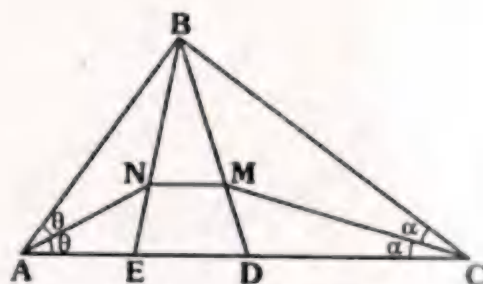
A) 5

B) 6

C) 4

D) 3

E) 8



### PROBLEMA N° 5

Se tiene el cuadrado ABCD de centro O, se ubica P en  $\overline{AD}$ , tal que  $\overline{AO} \cap \overline{BP} = \{L\}$  y

$m\angle PCD = \frac{37^\circ}{2}$ . Calcule  $\frac{BL}{LP}$

A)  $\frac{2}{3}$

B)  $\frac{3}{2}$

C)  $\frac{1}{2}$

D) 2

E)  $\frac{4}{3}$

**PROBLEMA N° 6**

En el gráfico, ABCD es un cuadrado y  $PQ=7$ . Calcule QR.

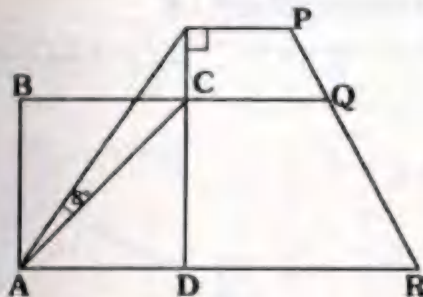
A) 21

B) 14

C)  $7\sqrt{2}$

D)  $14\sqrt{2}$

E)  $21\sqrt{2}$



**PROBLEMA N° 7**

En el gráfico, M es punto de tangencia, si  $m\angle Q = 106^\circ$  y  $\vec{\mathcal{L}}_1 \parallel \vec{\mathcal{L}}_2 \parallel \vec{\mathcal{L}}_3$ . Calcule  $\frac{AB}{BC}$ .

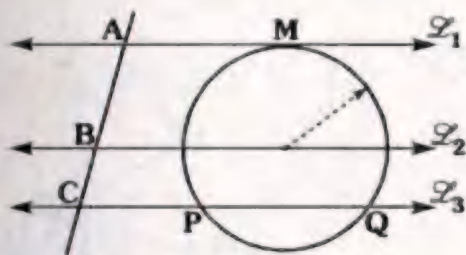
A) 3/8

B) 3/5

C) 2/5

D) 4/5

E) 5/3



**PROBLEMA N° 8**

En el gráfico,  $\vec{\mathcal{L}}_1 \parallel \vec{\mathcal{L}}_2 \parallel \vec{\mathcal{L}}_3$ , halle  $\frac{a}{m} + \frac{n}{b}$ .

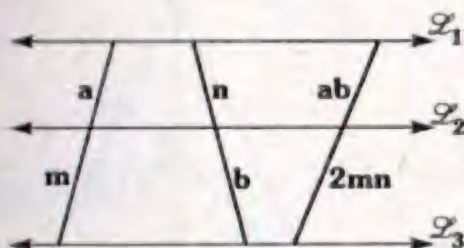
A) 1

B) 2

C) 3/2

D) 3

E) 2/3



**PROBLEMA N° 9**

En el gráfico, ABCD es cuadrado y  $m\widehat{DQ} = 53^\circ$ . Calcule  $\frac{PQ}{QR}$ .

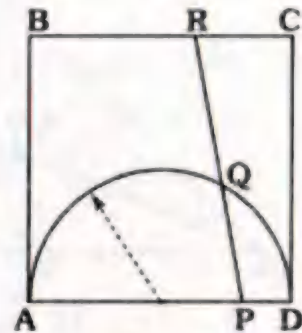
A) 3/4

B) 4/5

C) 2/3

D) 5/6

E) 2/5



**PROBLEMA N° 10**

En el gráfico,  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{AC}$  son diámetros.

Si  $AD=1$ ,  $DE=3$  y  $FG=\frac{4}{3}$ . Calcule FC.

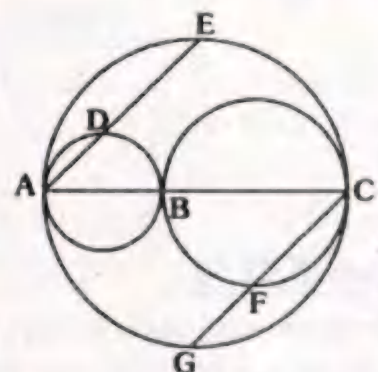
A) 4,5

B) 5

C) 5,2

D) 5,5

E) 4



**PROBLEMA N° 11**

De la figura,  $FC=5$ ,  $CR=10$  y  $AR=4$ . Calcule AD.

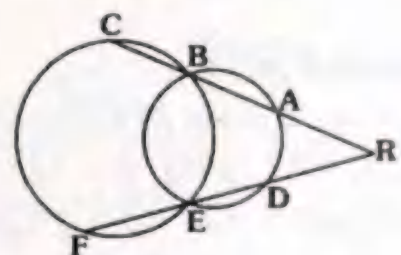
A) 1,5

B) 1

C) 2

D) 2,5

E) 3

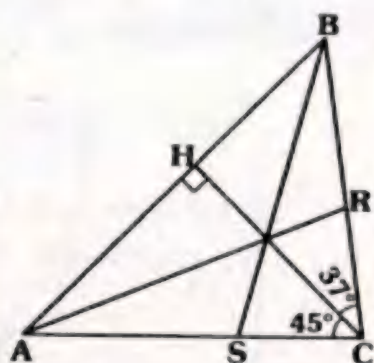




**PROBLEMA N° 12**

En el gráfico,  $AS=4(CS)$ . Calcule  $BR/RC$ .

- A) 2
- B) 3
- C) 4
- D) 5
- E)  $5/2$



**PROBLEMA N° 13**

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B), M es punto medio de  $\overline{BC}$ , se traza  $\overline{MH} \perp \overline{AC}$  ( $H \in \overline{AC}$ ) tal que  $8(AH) = 13(HC)$ , luego en el triángulo ABH se traza la altura AP. Calcule  $BP/PH$ .

- A)  $\frac{8}{13}$
- B)  $\frac{5}{8}$
- C)  $\frac{13}{21}$
- D)  $\frac{5}{13}$
- E)  $\frac{3}{8}$

**PROBLEMA N° 14**

En el trapecio rectángulo ABCD, recto en A y B se tiene que  $AB=BC$ , se ubica "P" en  $\overline{BD}$ . Si P dista 5 de  $\overline{AD}$  y  $m\angle ADC = 53^\circ$ , ¿cuánto dista "P" de  $\overline{CD}$ ?

- A) 6
- B) 8
- C) 3
- D) 5
- E) 4

**PROBLEMA N° 15**

Se tiene el cuadrado ABCD de centro O, P está en  $\overline{BC}$  y Q en  $\overline{CD}$  tal que  $m\angle PAQ = 45^\circ$ ,  $\overline{OD} \cap \overline{AQ} = \{L\}$ .

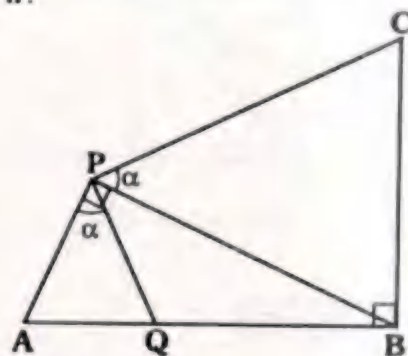
Si  $PC = 6\sqrt{2}$ . Calcule LD.

- ❖ A) 6
- ❖ B) 3
- ❖ C)  $3\sqrt{2}$
- ❖ D)  $6\sqrt{2}$
- ❖ E)  $6\sqrt{3}$

**PROBLEMA N° 16**

De la figura,  $PB=12$  y  $3(BC)=4(AQ)$ . Calcule AP.

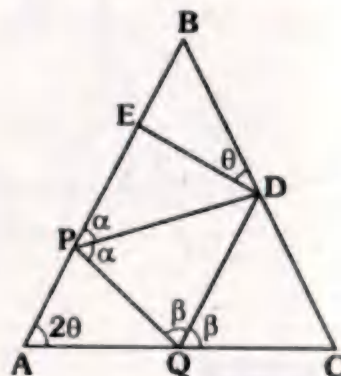
- ❖ A) 6
- ❖ B) 7
- ❖ C) 8
- ❖ D) 9
- ❖ E) 10



**PROBLEMA N° 17**

De la figura,  $(AB)(BE)=144$ ,  $3(AB)=4(AC)$ . Calcule BC.

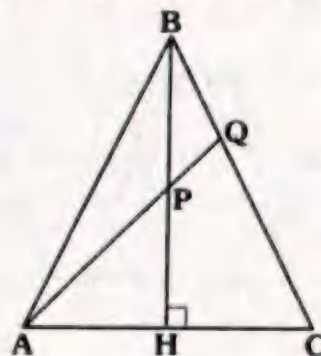
- ❖ A) 15
- ❖ B) 16
- ❖ C) 21
- ❖ D) 18
- ❖ E) 8



**PROBLEMA N° 18**

Si:  $AB=BC$ ,  $AP=3(PQ)$ ,  $BQ=5$ , calcule QC.

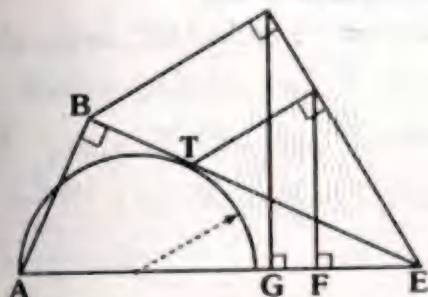
- ❖ A) 5
- ❖ B) 6
- ❖ C) 10
- ❖ D) 15
- ❖ E) 8



**PROBLEMA N° 19**

En el gráfico, T es punto de tangencia. Calcule AE, si:  $AB=3$  y  $FE=3(GF)$ .

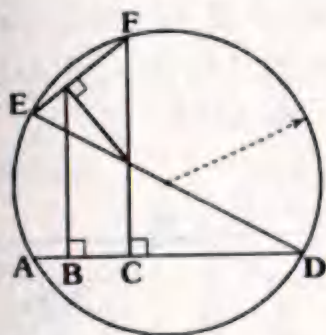
- A) 6
- B) 9
- C) 12
- D) 15
- E) 18



**PROBLEMA N° 20**

En el gráfico:  $AB=1$  y  $BC=2$ . Calcular CD.

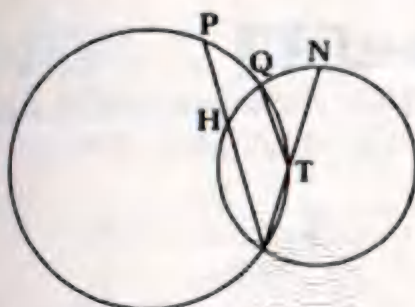
- A) 12
- B) 9
- C) 4
- D) 8
- E) 6



**PROBLEMA N° 21**

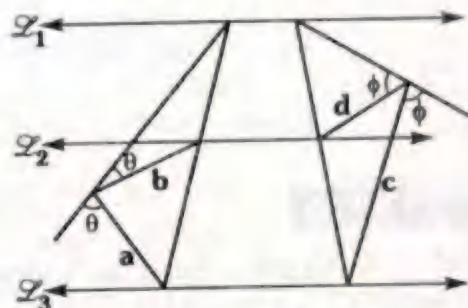
Calcular QT, si  $PQ=3$  y  $NT=2(HP)$ .

- A) 6
- B) 3
- C) 4
- D) 5
- E) 4,5



**PROBLEMA N° 22**

En el gráfico,  $\vec{\ell}_1 \parallel \vec{\ell}_2 \parallel \vec{\ell}_3$ , halle la relación entre a, b, c y d.



- A)  $ab=cd$
- B)  $ad=cb$
- C)  $ac=bd$
- D)  $a+b=c+d$
- E)  $a-b=c-d$

**PROBLEMA N° 23**

En un triángulo ABC de incentro I, se ubica en  $\overline{AC}$  tal que  $m\angle AID = 90^\circ$ . Calcule IC, si  $(BC)(CD)=64$ .

- A) 2
- B) 4
- C) 8
- D) 16
- E)  $4\sqrt{2}$

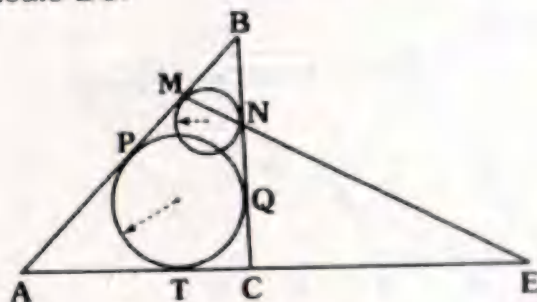
**PROBLEMA N° 24**

Se tiene el cuadrilátero convexo ABCD, se ubica P en  $\overline{AC}$ . I y F son los incentros de los triángulos ABC y ADC respectivamente, son tal que  $\overline{AI}$ ,  $\overline{DF}$  y  $\overline{AC}$  concurren. Si  $AB=18$ ,  $BC=12$  y  $AD=15$ , calcule CD.

- A) 12
- B) 15
- C) 10
- D) 9
- E) 16

**PROBLEMA N° 25**

En el gráfico M, P, T, Q y N son puntos de tangencia. Si  $AP=4$ ,  $TC=1$  y  $NQ=3$ . Calcule EC.



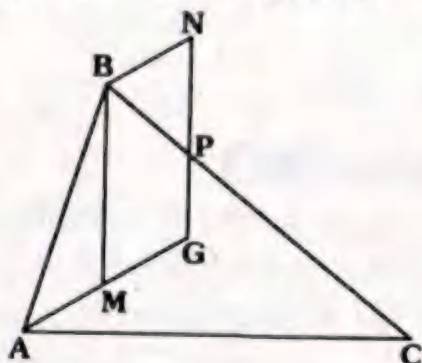


- A)  $\frac{20}{3}$       B)  $\frac{18}{5}$       C)  $\frac{20}{7}$   
D) 20      E) 19

**PROBLEMA N° 26**

En el gráfico, G es baricentro del triángulo ABC y MBNG es paralelogramo. Si  $MG=2(AM)$  y  $BP=4$ . Calcule PC.

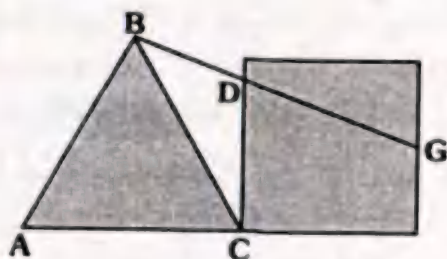
- A) 15  
B) 10  
C) 12  
D) 16  
E) 14



**PROBLEMA N° 27**

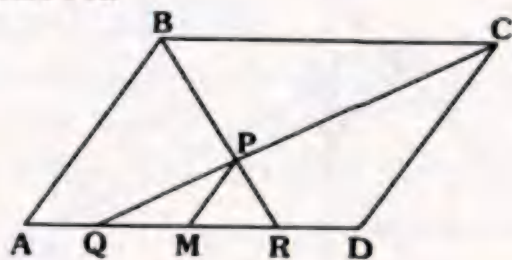
En el gráfico, las regiones sombreadas son regulares e isoperimétricas, si  $DG=6$ . Calcule BD.

- A) 4  
B) 6  
C) 8  
D)  $2\sqrt{3}$   
E)  $3\sqrt{3}$



**PROBLEMA N° 28**

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo,  $\overline{PM} \parallel \overline{CD}$ ,  $QM=MR=RD$  y  $BP=8$ . Calcule PR.



- A) 2      B) 3      C) 4  
D) 6      E) 8

**PROBLEMA N° 29**

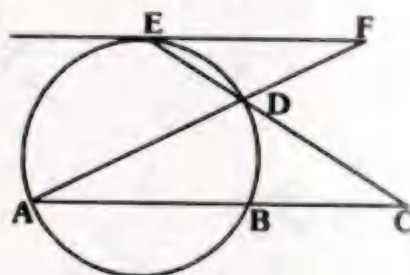
Se tiene el triángulo ABC, se traza la ceviana interior  $\overline{BF}$ , en el triángulo ABF se traza la bisectriz interior  $\overline{AD}$ , E está en  $\overline{BC}$  tal que  $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ ,  $AB=5$ ,  $AF=3$  y  $DE=4$ . Calcule FC.

- A) 6,4      B) 6      C) 12  
D) 5,4      E) 6,2

**PROBLEMA N° 30**

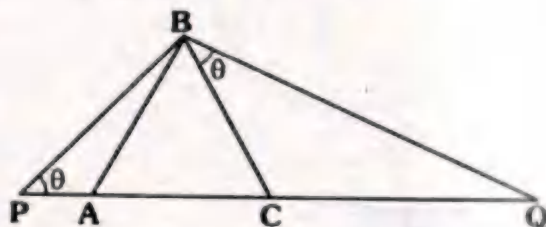
En el gráfico, E es punto de tangencia,  $m\widehat{ED} = m\widehat{DB}$ ,  $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$ ,  $3(AD) = 7(ED)$  y  $AB=12$ . Calcule BC.

- A) 5  
B) 7  
C) 9  
D) 10  
E) 14



**PROBLEMA N° 31**

En el gráfico, el triángulo ABC es equilátero,  $PA=3$  y  $CQ=12$ . Calcule AC.



- A) 9      B) 6      C) 8  
D)  $6\sqrt{3}$       E)  $8\sqrt{3}$

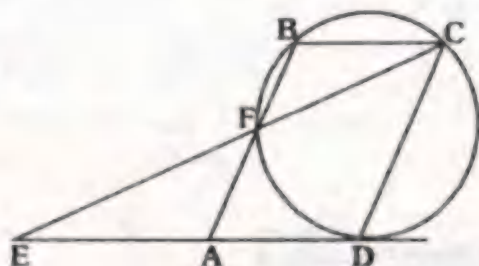




**PROBLEMA N° 38**

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo, D es punto de tangencia. Si  $BC=5$  y  $AE=4$ . Calcule EF.

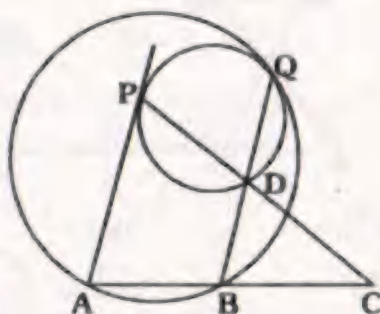
- A) 4
- B) 6
- C) 5
- D) 7
- E) 9



**PROBLEMA N° 39**

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Si  $QD=a$  y  $BD=b$ . Calcule BC.

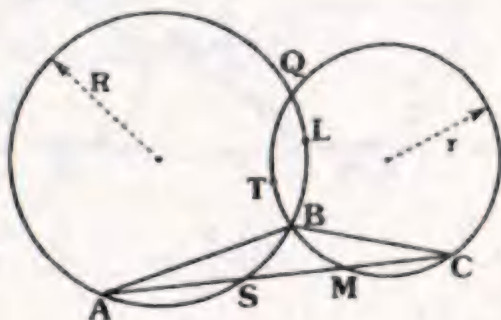
- A)  $\sqrt{ab}$
- B)  $\sqrt{a(a+b)}$
- C)  $\sqrt{a^2+b^2}$
- D)  $2\sqrt{a^2+b^2}$
- E)  $\sqrt{b(a+b)}$



**PROBLEMA N° 40**

En el gráfico,  $AB=c$ ,  $m\widehat{QLB} = m\widehat{SB}$  y  $m\widehat{BM} = m\widehat{QTB}$ . Calcule BC.

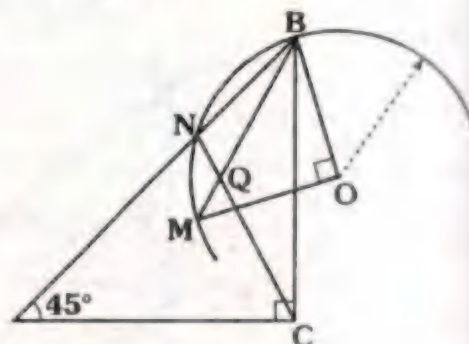
- A)  $\frac{cR}{R}$
- B)  $\frac{cR}{r}$
- C)  $\frac{cR}{r}$
- D)  $\frac{R^2}{r+c}$
- E)  $\frac{c^2}{R+r}$



**PROBLEMA N° 41**

Del gráfico,  $\frac{MQ}{QB} = \frac{2}{3}$ . Calcule:  $\frac{CQ}{QN}$

- A) 1
- B)  $\frac{2}{3}$
- C)  $\frac{3}{2}$
- D)  $\frac{4}{3}$
- E)  $\frac{3}{4}$



**PROBLEMA N° 42**

En el triángulo ABC, se traza la bisectriz interior BN, en  $\overline{BN}$  se ubica M, en la prolongación de  $\overline{AM}$  se ubica Q tal que  $m\angle AMN = m\angle CMQ$ . Si  $AB=c$ ;  $BC=a$ ,  $MN=m$  y  $CM=n$ . Indique la relación entre a, b, m y n.

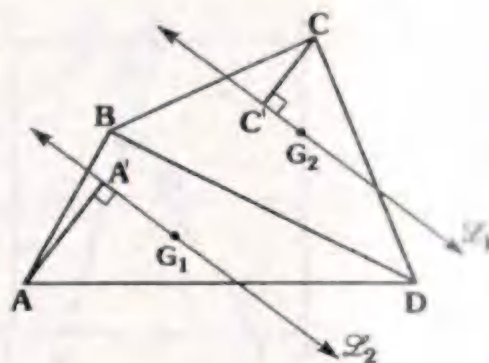
- A)  $cn=m(a+c)$
- B)  $ab=mn$
- C)  $cn=am$
- D)  $cn=a(m+n)$
- E)  $cm=n(a+c)$

**PROBLEMA N° 43**

En el gráfico,  $G_1$  y  $G_2$  son baricentros de los triángulos ABD y BCD respectivamente. Si  $\vec{\mathcal{L}}_1 \parallel \vec{\mathcal{L}}_2$  y  $AA'+BB'=9$ .

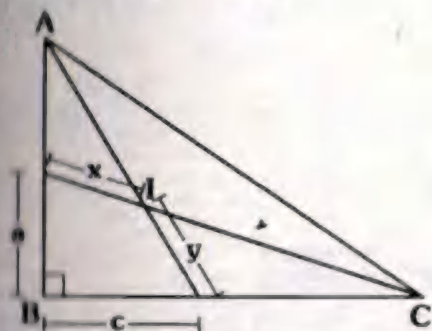
Calcule la distancia entre  $\vec{\mathcal{L}}_1$  y  $\vec{\mathcal{L}}_2$ .

- A) 4,5
- B) 6
- C) 4
- D) 8
- E) 9



**PROBLEMA N° 44**

Indique la relación correcta, siendo I el incentro del triángulo ABC.



A)  $ax = xy$     B)  $ax = cy$     C)  $ay = cx$

D)  $ax^2 = ay^2$     E)  $xa^2 = yc^2$

**PROBLEMA N° 45**

En el gráfico, T y Q son puntos de tangencia y el triángulo MNB es equilátero. Si  $QH = 3$ , Calcule HC.

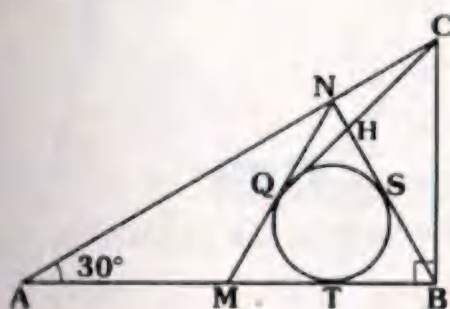
A) 3

B) 4

C)  $2\sqrt{3}$

D)  $3\sqrt{3}$

E)  $4\sqrt{3}$



**PROBLEMA N° 46**

En el gráfico,  $BM = 12$  y  $MQ = 3$ . Calcule QS

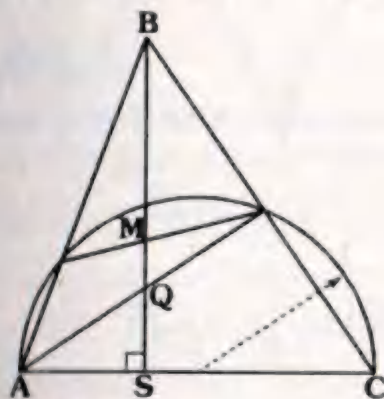
A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6



**PROBLEMA N° 47**

En el gráfico,  $PQ = 3$  y  $QR = 2$ . Calcule RC.

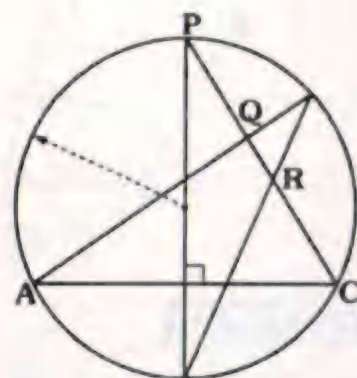
A) 8

B) 9

C) 10

D) 12

E) 14



**PROBLEMA N° 48**

En el gráfico,  $AP = 7$  y  $BP = 2$ . Calcule BQ (P, R y Q son puntos de tangencia)

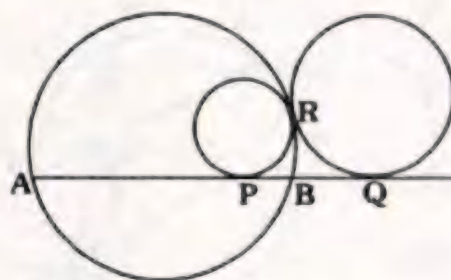
A) 5

B) 3

C) 4,8

D) 3,6

E) 5,1



**PROBLEMA N° 49**

En el triángulo ABC, la mediana BM y la bisectriz interior AQ son perpendiculares. Si  $BC = 9$ , calcule QC.

A) 8

B) 6

C) 7

D) 5

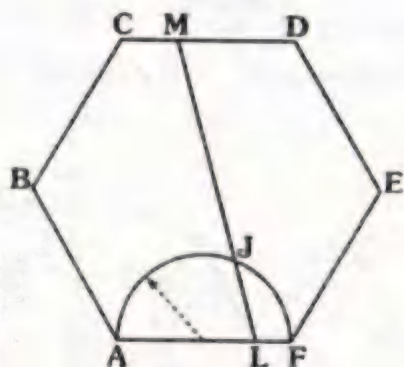
E) 4

**PROBLEMA N° 50**

En el gráfico, ABCDEF es un hexágono regular. Si  $MJ = 3(JL)$ , calcule  $m\widehat{JF}$ .



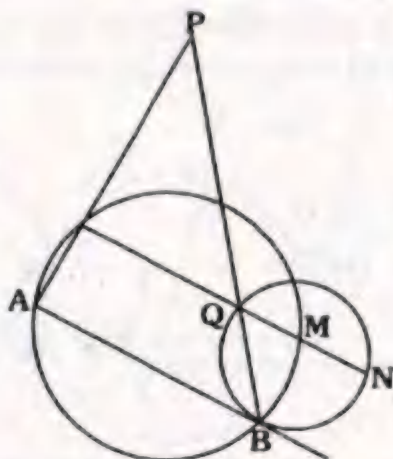
- A)  $45^\circ$   
B)  $30^\circ$   
C)  $53^\circ$   
D)  $60^\circ$   
E)  $90^\circ$



**PROBLEMA N° 51**

En el gráfico, B es punto de tangencia, si  $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$  y  $3(PQ) = 2(BQ)$ . Calcule  $\frac{MN}{AB}$ .

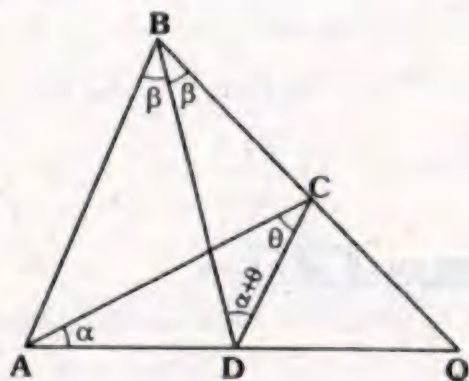
- A)  $\frac{2}{5}$   
B)  $\frac{1}{5}$   
C)  $\frac{3}{5}$   
D)  $\frac{4}{5}$   
E)  $\frac{3}{10}$



**PROBLEMA N° 52**

En el gráfico,  $5(DE) = 2(AD)$  y  $BC = 12$ . Calcule AB.

- A) 9  
B) 12  
C) 15  
D) 18  
E) 24



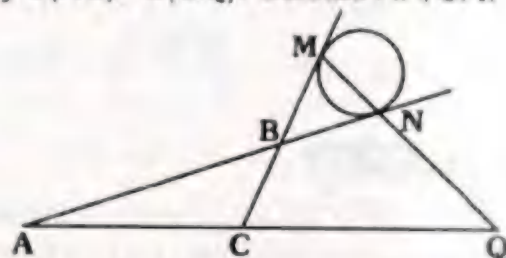
**PROBLEMA N° 53**

En el triángulo ABC,  $m\angle ABC = 150^\circ$ , se traza la ceviana interior BR tal que  $m\angle ABR = m\angle ACB = x$ . Si  $AR = 2$  y  $RC = 3$ , Calcule x.

- A)  $18,5^\circ$  B)  $15^\circ$  C)  $22,5^\circ$   
D)  $26,5^\circ$  E)  $23^\circ$

**PROBLEMA N° 54**

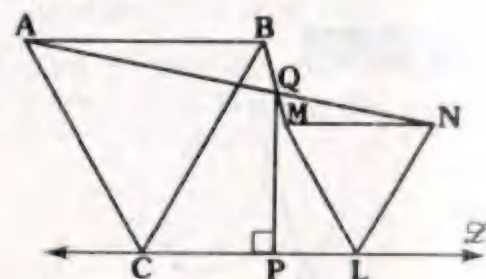
En el gráfico, M y N son puntos de tangencia y  $3(AC) = 2(CQ)$ . Calcule  $\frac{AN}{CM}$ .



- A)  $\frac{2}{3}$  B)  $\frac{3}{2}$  C)  $\frac{5}{2}$   
D)  $\frac{5}{3}$  E)  $\frac{3}{5}$

**PROBLEMA N° 55**

Los triángulos ABC y LMN son equiláteros. Si  $AB = a$ ,  $MN = b$  y  $\overline{AB} \parallel \overline{MN} \parallel \overline{L}$ . Calcule PQ.

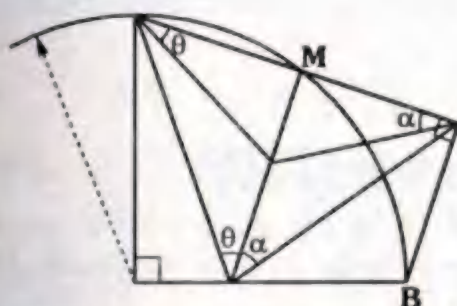


- A)  $\frac{a^2}{b}$  B)  $\frac{a^2\sqrt{3}}{b}$  C)  $\frac{ab\sqrt{3}}{a+b}$   
D)  $\frac{b\sqrt{3}}{a}$  E)  $\frac{2ab\sqrt{3}}{a+b}$

**PROBLEMA N° 56**

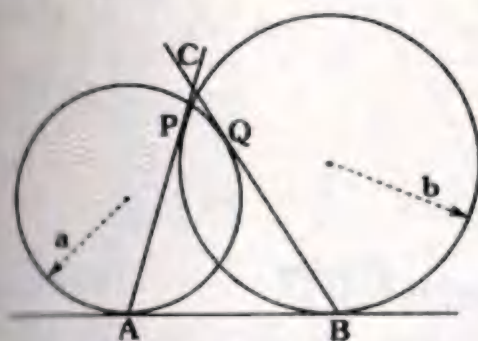
Del gráfico. Calcule  $m\widehat{MB}$ .

- A)  $30^\circ$
- B)  $60^\circ$
- C)  $53^\circ$
- D)  $37^\circ$
- E)  $45^\circ$



**PROBLEMA N° 57**

Calcule el inradio del triángulo ABC (A, P, Q y B son puntos de tangencia)



- A)  $\frac{a+b}{2}$
- B)  $\frac{ab}{a+b}$
- C)  $\frac{2ab}{a+b}$
- D)  $\sqrt{ab}$
- E)  $\sqrt{2ab}$

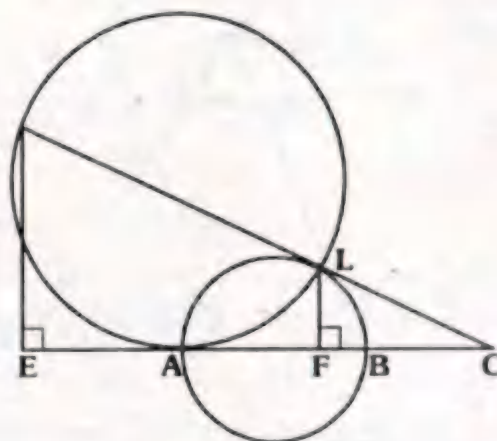
**PROBLEMA N° 58**

En el triángulo ABC recto en B, se trazan las bisectrices exteriores AP y CQ,  $BP=a$  y  $BQ=b$ . Si  $P'$  y  $Q'$  están en  $\overleftrightarrow{AC}$ , tal que  $\overline{PP'}$  y  $\overline{QQ'}$  son perpendiculares a  $\overleftrightarrow{AC}$ ,  $\overline{P'Q'} \cap \overline{Q'P} = \{S\}$ . Calcule la longitud de la altura del triángulo  $P'SQ'$ .

- A)  $\sqrt{ab}$
- B)  $\sqrt{2ab}$
- C)  $\frac{ab}{a+b}$
- D)  $\frac{2ab}{a+b}$
- E)  $\frac{a+b}{2}$

**PROBLEMA N° 59**

En el gráfico, A y L son puntos de tangencia. Si  $AB=4(BC)$ . Calcule  $EF/FC$ .



- A) 2
- B) 4
- C)  $\frac{1}{2}$
- D)  $\frac{1}{4}$
- E) 3

**PROBLEMA N° 60**

En un triángulo, las longitudes de los lados están en progresión aritmética.

Calcule la razón entre el inradio y la longitud de la altura relativa al lado intermedio.

- A)  $\frac{1}{2}$
- B)  $\frac{1}{3}$
- C)  $\frac{1}{4}$
- D)  $\frac{2}{3}$
- E)  $\frac{1}{5}$



# Problemas Resueltos

Ciclo **Cepre-Uni**

## PROBLEMA N° 61

(Seminario)

En la figura:  $\vec{\ell}_1 \parallel \vec{\ell}_2 \parallel \vec{\ell}_3$  y  $\vec{\ell}_4 \parallel \vec{\ell}_5$   
 $AB=DE=3$ ,  $IG=5$ ,  $EF=6$ ,  $HG=3(IE)$ .

Calcule  $CD-BC$ .

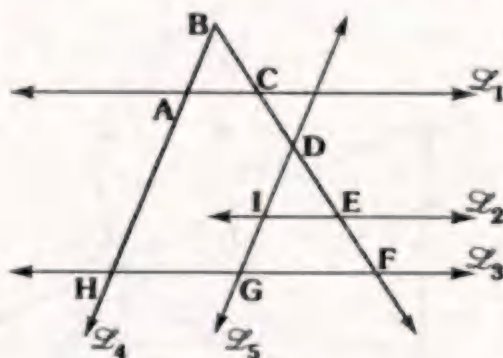
A) 1,5

B) 1,8

C) 2

D) 2,28

E) 2,4



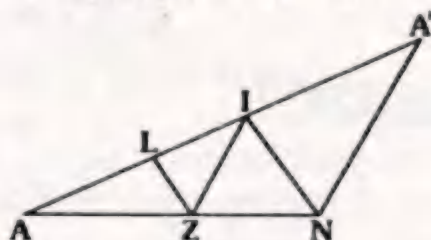
## PROBLEMA N° 62

(Práctica)

En la figura mostrada se cumple que:

$\overline{ZL} \parallel \overline{NI}$  y  $\overline{ZI} \parallel \overline{NA'}$ . Si  $AL = k_1$  y  $LI = k_2$

entonces la longitud de  $\overline{IA'}$  es:



A)  $\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

B)  $\frac{k_1}{k_2} (k_2 + k_1)$

C)  $\frac{k_2}{k_1} (k_2 + k_1)$

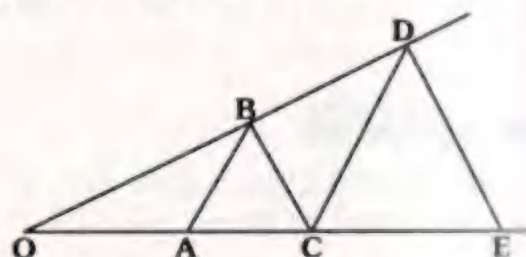
D)  $\sqrt{k_1 k_2}$

E)  $\frac{k_1 + 2k_2}{k_1}$

## PROBLEMA N° 63

(Seminario)

De la figura, ABC y CDE son triángulos equiláteros. Si  $AB=m$ ,  $CD=n$ . Halle OA.



A)  $\frac{n^2}{n+m}$

B)  $\frac{n^2}{n-m}$

C)  $\frac{m^2}{n+m}$

D)  $\frac{m^2}{n-m}$

E)  $\frac{m^2}{2n+m}$

## PROBLEMA N° 64

(Seminario)

Sea el triángulo ABC,  $D \in \overline{AC}$  tal que

$AD=DC$ ,  $E \in \overline{AD}$  tal que  $\overline{EF} \parallel \overline{DB}$ ,  $F \in \overline{CD}$ ,

$\overline{AB} \cap \overline{EF} = \{T\}$ . Si  $BF=6$  y  $BC=9$  y  $AT=4$

Halle BT.

A) 4

B) 6

C) 8

D) 9

E) 10

## PROBLEMA N° 65

(Seminario)

Se tiene un triángulo ABC en el cual se tra-

zan las cevianas  $\overline{BP}$  y  $\overline{AQ}$  intersectándose

en el punto M. Si  $2AM=3MQ$ ;  $2BQ=QC$  y

$PC=L$ , halle AP.

A)  $2L$

B)  $L/2$

C)  $\frac{3}{2}L$

D)  $\frac{4}{3}L$

E)  $\frac{5}{3}L$

**PROBLEMA N° 66**

(Seminario)

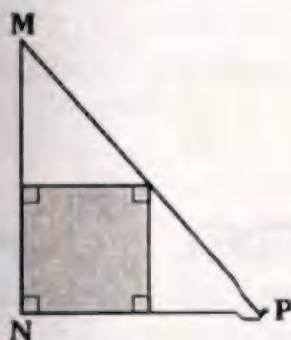
En un triángulo ABF se traza la mediana  $\overline{BE}$ ,  
 He  $\overline{H}$ ,  $P \in \overline{BF}$ ,  $\overline{DP} \parallel \overline{BE}$ ,  $\overline{DP} \cap \overline{AB} = \{C\}$ ,  
 $AB=11$ ,  $BC=7$ ,  $BP=14$ , hálle  $PF$ .

- A) 6,5                      B) 7,5                      C) 8  
 D) 8,5                      E) 9

**PROBLEMA N° 67**

(Práctica)

Si  $MN=p$  y  $NP=m$ , entonces el perímetro  
 del cuadrado que limita la región sombreada es



- A)  $\frac{4pm}{p+m}$                       B)  $\frac{pm}{(p+m)}$                       C)  $\frac{4pm}{p+2m}$   
 D)  $\frac{4pm}{m+2p}$                       E)  $\frac{pm}{p+m}$

**PROBLEMA N° 68**

(Seminario)

Sobre los lados de un triángulo escaleno ABC se construye exteriormente los triángulos equiláteros APB y BQC tal que  $CP=6$ . Calcule la distancia entre los puntos medios de  $\overline{AP}$  y  $\overline{CQ}$ .

- A) 5                      B)  $3\sqrt{2}$                       C)  $4\sqrt{3}$   
 D)  $3\sqrt{3}$                       E)  $4\sqrt{2}$

**PROBLEMA N° 69**

(Seminario)

En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior  $\overline{BP}$ , luego se traza la bisectriz exterior  $\overline{BQ}$ ,  $F \in \overline{AB}$ ,  $\overline{FC} \parallel \overline{BQ}$ ,  $\overline{BP} \cap \overline{FC} = \{R\}$ , hálle  $(AP)(BR)$ .

- A)  $2AQ \cdot PR$                       B)  $AQ \cdot PR$                       C)  $3AQ \cdot PR$   
 D)  $4Q \cdot PR$                       E)  $5AQ \cdot PR$

**PROBLEMA N° 70**

(Seminario)

En un triángulo ABC,  $\overline{BD}$  es bisectriz,  $\overline{BM}$  es mediana e I es el incentro  
 $AI \cap \overline{BM} = \{P\}$ ,  $CI \cap \overline{BM} = \{Q\}$ ,  $\frac{BI}{ID} = \frac{3}{2}$ ,  
 $BP=6$ ,  $QM=4$ . Halle PQ.

- A) 2                      B) 3                      C) 4  
 D) 5                      E) 6

**PROBLEMA N° 71**

(Seminario)

En un triángulo ABC, la circunferencia inscrita al triángulo es tangente al lado  $\overline{AB}$  en M, al lado  $\overline{BC}$  en N y al lado  $\overline{AC}$  en el punto Q. La prolongación de  $\overline{MN}$  intersecta a la prolongación del lado  $\overline{AC}$  en el punto F. Si  $AQ=5u$  y  $QC=4u$ , entonces la longitud de  $\overline{CF}$  es:

- A)  $34u$                       B)  $36u$                       C)  $38u$   
 D)  $40u$                       E)  $42u$

**PROBLEMA N° 72**

(Seminario)

Dado un triángulo ABC de baricentro G, en él se traza la mediana  $\overline{BM}$ , luego se traza la bisectriz interior  $\overline{AE}$  del triángulo ABM, la prolongación de  $\overline{CG}$  intersecta a  $\overline{AE}$  en D. Halle  $\frac{AD}{DE}$ . Si  $AB=5$  y  $AC=8$ .

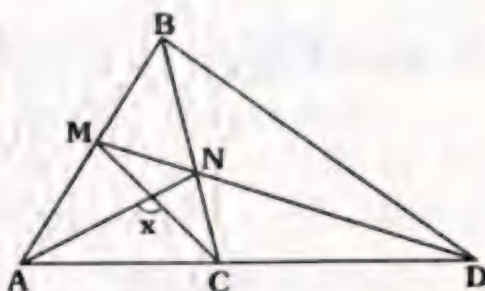


- A) 5                      B) 6                      C) 7  
D) 8                      E) 9

**PROBLEMA N° 73** (Examen parcial)

En la figura mostrada,  $m\angle ABC = 40^\circ$ ,  $m\angle CBD = 70^\circ$ ,  $\overline{AN}$  es bisectriz del ángulo A. Calcule x.

- A)  $80^\circ$   
B)  $90^\circ$   
C)  $100^\circ$   
D)  $110^\circ$   
E)  $135^\circ$



**PROBLEMA N° 74** (Seminario)

En un triángulo ABC, se trazan las cevianas concurrentes  $\overline{AM}$ ,  $\overline{CN}$  y  $\overline{BQ}$ , ( $M \in \overline{BC}$ ,  $N \in \overline{AB}$  y  $Q \in \overline{AC}$ ). La prolongación de  $\overline{NM}$  intersecta a la prolongación de  $\overline{AC}$  en T. Si  $AQ = 5$  cm y  $QC = 2$  cm. Halle CT (en cm).

- A) 4                      B)  $\frac{9}{2}$                       C)  $\frac{14}{3}$   
D) 5                      E)  $\frac{26}{5}$

**PROBLEMA N° 75** (Práctica)

En un triángulo ABC se ubican los puntos P y Q en los catetos  $\overline{BC}$  y  $\overline{AB}$  se trazan los rayos  $\overline{PM} \parallel \overline{AB}$ ;  $\overline{QN} \parallel \overline{BC}$ . Si además  $\overline{PM}$  y  $\overline{QN}$  son tangentes a la circunferencia inscrita y  $MN = a$ ;  $MC = b$ , entonces AN mide:

- A)  $\frac{a(a+b)}{b-a}$                       B)  $\frac{a+b}{b-a}$

- ❖ C)  $\frac{b(a+b)}{b-a}$                       D)  $\frac{a+b+c}{2}$   
❖ E)  $\frac{a+b+c}{b-a}$

**PROBLEMA N° 76** (Seminario)

En un triángulo PQR acutángulo, se traza la bisectriz interior PA, luego se trazan los segmentos  $\overline{QM}$  y  $\overline{RN}$  perpendiculares a dicha bisectriz, y a su prolongación, en donde M es un punto interior del triángulo; si:  $AM = a$  y  $AN = b$ . Halle PM.

- ❖ A)  $\frac{a(a-b)}{a+b}$                       B)  $\frac{a(a+b)}{a-b}$                       C)  $\frac{a(a+b)}{b-a}$   
❖ D)  $\frac{a(b+a)}{a+b}$                       E)  $\frac{b(a+b)}{a-b}$

**PROBLEMA N° 77** (Seminario)

En un triángulo ABC ( $AB > BC$ ) se traza la bisectriz exterior  $\overline{BF}$  ( $F \in \overleftrightarrow{AC}$ ). La mediatriz de  $\overline{BF}$  intercepta a  $\overline{CF}$  en M.

- ❖ Si:  $AM \cdot CM = 16u^2$ , Halle FM (en u).  
❖ A) 1                      B) 2                      C) 3  
❖ D) 4                      E) 8

**PROBLEMA N° 78**

En un trapezoide ABCD,  $G_1$  es el baricentro de la región ABD.  $G_2$  es el baricentro de la región triangular ACD.  $\overline{BG_2}$  intersecta a  $\overline{CG_1}$  en G. Se traza una recta secante r que intersecta a los lados  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  y pasa por G. Si  $d(A, r) + d(D, r) = 15$ ,  $d(B, r) = 8$ , halle  $d(C, r)$ .

- ❖ A) 5                      B) 6                      C) 7  
❖ D) 8                      E) 11

**PROBLEMA N° 79**

(Seminario)

En un triángulo ABC obtuso en B, se traza la bisectriz interior  $\overline{BM}$  y las alturas  $\overline{AN}$  y  $\overline{CQ}$  respectivamente, si  $AN=a$ ,  $CQ=b$ , calcule la longitud de la altura trazada de B en el triángulo BMC.

- A)  $\frac{a-b}{a+b}$  B)  $\frac{ab}{a+b}$  C)  $\frac{ab}{2a-b}$   
D)  $\frac{ab}{2a+b}$  E)  $\frac{ab}{3a+b}$

**PROBLEMA N° 80**

(Seminario)

En un triángulo ABC se trazan las alturas  $\overline{AD}$  y  $\overline{CE}$ . Si  $AC=L$  y el ángulo ABC mide  $60^\circ$ , entonces HI es:

- A)  $\frac{L}{2}$  B)  $2L$  C)  $3L$   
D)  $\frac{L}{3}$  E)  $\frac{3}{2}L$

**PROBLEMA N° 81**

(Seminario)

En un triángulo ABC, I es el incentro y E es el excentro relativo al lado  $\overline{AC}$ . Si  $AB=6u$ ,  $BC=11u$  y  $BI=4u$ , entonces la longitud de  $\overline{EI}$  es:

- A)  $6u$  B)  $7u$  C)  $8u$   
D)  $9u$  E)  $11u$

**PROBLEMA N° 82**

(Seminario)

En un triángulo ABC,  $AB=6$ , el segmento que une A con el incentro mide 5, y el segmento que une el incentro con el excentro relativo a  $\overline{BC}$  mide 7, calcule AC.

- A) 8 B) 9 C) 10  
D) 11 E) 14

**PROBLEMA N° 83**

(Seminario)

En un triángulo ABC,  $m\angle ABC = 106^\circ$ . Si  $AB=c$ ,  $BC=a$ . Halle la longitud de la menor bisectriz interna del triángulo.

- A)  $\frac{2ac}{a+c}$  B)  $\frac{3ac}{4(a+c)}$  C)  $\frac{6ac}{5(a+c)}$   
D)  $\frac{7ac}{a+c}$  E)  $\frac{8ac}{5(a+c)}$

**PROBLEMA N° 84**

(Seminario)

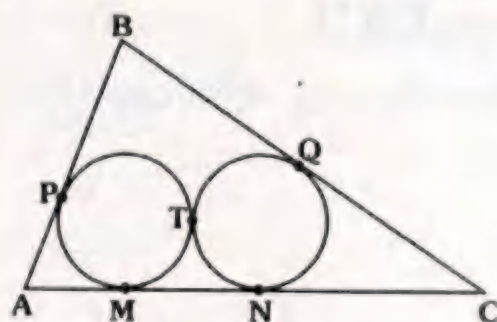
En un triángulo acutángulo ABC se traza la altura  $\overline{BB'}$ ;  $AC=b$ ;  $BB'=h$  se inscribe el cuadrado EFGH;  $\overline{EH} \subset \overline{AC}$  y  $F \in \overline{AB}$ ;  $G \in \overline{BC}$ ; en el triángulo FGH, se inscribe el cuadrado MNPQ;  $\overline{MQ} \subset \overline{FG}$  y  $N \in \overline{FB}$ ;  $P \in \overline{BG}$ ; en el triángulo NBP se inscribe un tercer cuadrado y así sucesivamente. Demuestre que la longitud del lado del enésimo cuadrado es:

$$\frac{bh^n}{(b+h)^n}$$

**PROBLEMA N° 85**

(Práctica)

Las circunferencias son congruentes, de radios:  $r$ ;  $AC=b$ . M,N,P,Q,T son puntos de tangencia. Halle la longitud del inradio.



- A)  $\frac{br}{b+r}$  B)  $\frac{2br}{b+r}$  C)  $\frac{br}{b-2r}$   
D)  $\sqrt{b^2+r^2}$  E)  $\sqrt{\frac{br}{3}}$



**PROBLEMA N° 86**

(Seminario)

El triángulo ABC está inscrito en una circunferencia y por A se traza una tangente. Por el punto medio de  $\overline{AB}$  se traza una paralela a dicha tangente que intercepta a  $\overline{AC}$  en N. Si  $AN=a$  y  $NC=b$ , calcule AB.

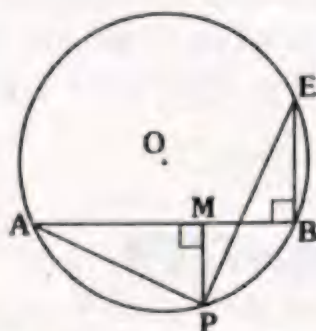
- A)  $\sqrt{2a(a+b)}$       B)  $\sqrt{a(a+b)}$   
 C)  $\sqrt{b(a+b)}$       D)  $\sqrt{2b(a+b)}$   
 E)  $\sqrt{2ab}$

**PROBLEMA N° 87**

(Examen parcial)

En la figura,  $AP=PE$ . Si  $AM=a$  y  $BM=b$ , halle BL:

- A)  $\frac{b}{a}(2a-b)$   
 B)  $a-2b$   
 C)  $a-b$   
 D)  $\sqrt{ab}$   
 E)  $\frac{b}{a}(a-b)$

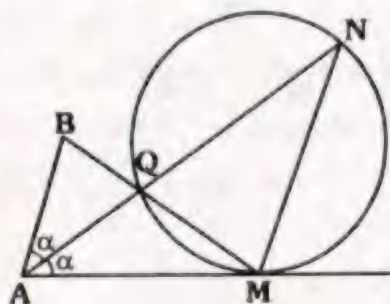


**PROBLEMA N° 88**

(Práctica)

En la figura mostrada,  $MN=24u$  y  $\frac{AB}{AN} = \frac{3}{8}$ . Halle BQ.

- A) 4,5  
 B) 6  
 C) 7,5  
 D) 8  
 E) 9



**PROBLEMA N° 89**

(Seminario)

En un cuadrilátero inscrito en una circunferencia el producto de las distancias de un punto de la circunferencia a dos lados opuestos es  $8u^2$ . Calcule el producto de las distancias del mismo punto a los otros dos lados

- A)  $8u^2$       B)  $16u^2$       C)  $8\sqrt{2}u^2$   
 D)  $8\sqrt{3}u^2$       E)  $16\sqrt{2}u^2$

**PROBLEMA N° 90**

(Seminario)

Dos circunferencias son tangentes exteriores y sus radios miden R y r ( $R>r$ ). Si  $\frac{1}{R} + \frac{1}{r} = 0,25$ , calcule la distancia desde el punto de tangencia a la tangente común exterior.

- A) 5      B) 6      C) 7  
 D) 8      E) 9

**PROBLEMA N° 91**

(Seminario)

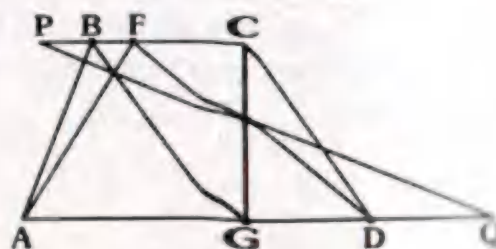
Tres circunferencias tangentes están inscritas en un ángulo. Si los radios de la circunferencias exteriores miden 35m y 315m, entonces el radio de la circunferencia interna es:

- A) 105      B) 115      C) 125  
 D) 150      E) 175

**PROBLEMA N° 92**

(Examen parcial)

En la figura,  $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ,  $PB=2$ ,  $AD=300$ . Halle la longitud de  $\overline{DQ}$ .



- A) 4                      B) 5                      C) 6  
D) 8                      E) 9

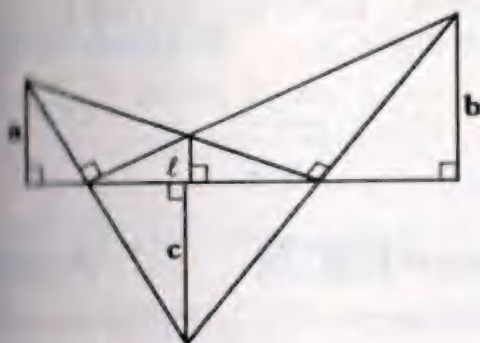
**PROBLEMA N° 93** (Examen parcial)

Delire los catetos  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  de un triángulo rectángulo  $ABC$  se construyen externamente los cuadrados  $ABFE$  y  $BCQP$  respectivamente,  $\overline{EC} \cap \overline{AB} = \{M\}$ ,  $\overline{AQ} \cap \overline{BC} = \{N\}$ . Si  $AM=4u$  y  $CN=9u$ . Calcule  $AB$ .

- A)  $8u$                       B)  $10u$                       C)  $12u$   
D)  $15u$                       E)  $20u$

**PROBLEMA N° 94** (Seminario)

Mostrar en la figura:  $\frac{1}{\ell} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ .



**PROBLEMA N° 95** (Seminario)

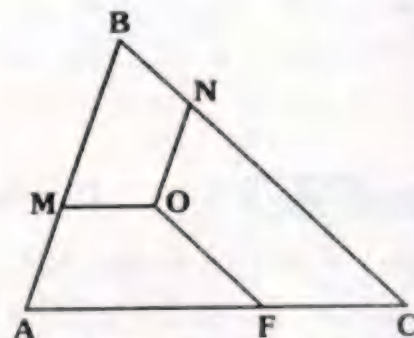
En un triángulo  $ABC$  se trazan las cevianas interiores  $\overline{AF}$ ,  $\overline{BM}$  y  $\overline{CE}$  concurrentes en  $O$  tal que  $m\angle BMF = m\angle FMC = 55^\circ$ . Calcule  $m\angle EMB$ .

- A)  $15^\circ$                       B)  $30^\circ$                       C)  $35^\circ$   
D)  $45^\circ$                       E)  $55^\circ$

**PROBLEMA N° 96** (Seminario)

En la figura,  $OM=ON=OF$ ;  $\overline{ON} \parallel \overline{AB}$ ,  $\overline{OF} \parallel \overline{BC}$  y  $\overline{OM} \parallel \overline{AC}$ . Si  $BN=a$ ,  $CF=b$  y

$AM=c$ . Calcule  $OM$ .



- A)  $b\sqrt{\frac{a}{c}}$                       B)  $\frac{ac}{b}$                       C)  $c\sqrt{\frac{b}{a}}$   
D)  $\sqrt[3]{abc}$                       E)  $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

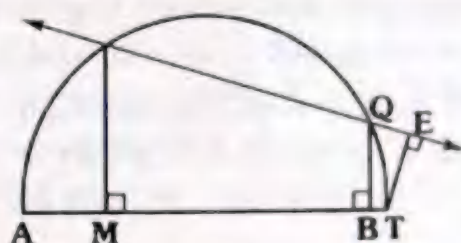
**PROBLEMA N° 97** (Seminario)

En un triángulo rectángulo  $ABC$  (recto en  $B$ ), se traza por un punto  $M$  de  $\overline{AB}$  un rayo paralelo a  $\overline{AC}$  que intercepta a  $\overline{BC}$  en  $F$  y a la perpendicular a  $\overline{BC}$  trazada en  $C$  en  $N$ . Si los inradios de los triángulos  $MBF$  y  $FCN$  miden 1 y 9, halle el inradio del triángulo  $ABC$ .

- A) 9                      B) 8                      C) 10  
D) 5                      E) 12

**PROBLEMA N° 98** (Seminario)

En la figura mostrada,  $\overline{AT}$  es diámetro de la semicircunferencia. Si  $MB=a$  y  $TB=b$ . Calcule  $BE$ .





A)  $\sqrt{(a+b)b}$

B)  $\sqrt{(a+b)a}$

C)  $2\sqrt{ab}$

D)  $\frac{ab}{a+b}$

E)  $\sqrt{ab}$

**PROBLEMA N° 99**

(Seminario)

En la figura, F es circuncentro del  $\triangle ABC$ . Si  $AB = 15\sqrt{2}$ ,  $BE = 6\sqrt{5}$  y  $EC = 2\sqrt{10}$ . Hallar BC.

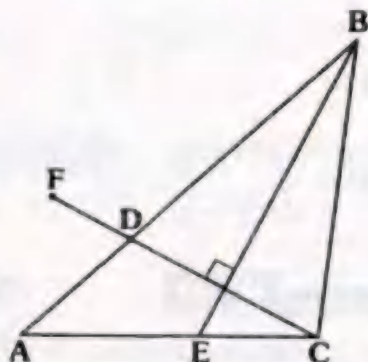
A) 7

B) 8

C) 9

D) 10

E) 11



**PROBLEMA N° 100**

(Seminario)

En la figura mostrada, calcular  $r$ , si  $ON = 2$  y  $MN = 6$ . (O es centro)

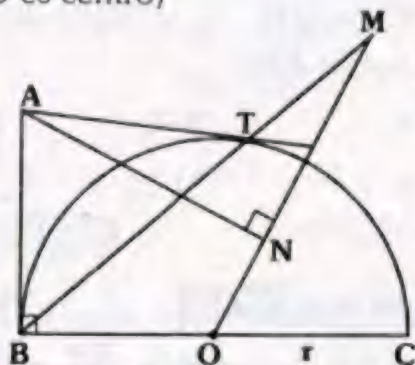
A)  $\sqrt{3}$

B) 2

C)  $2\sqrt{3}$

D)  $4\sqrt{3}$

E) 5



**PROBLEMA N° 101**

(Examen parcial)

En un triángulo ABC se traza la ceviana interior CP (P en  $\overline{AB}$ ) y en  $\overline{AC}$  se toma el punto Q tal que  $m\angle CPB = m\angle PQA$ . Calcular AC, si  $AP = 8$ ,  $PC = 12$  y  $PQ = 6$ .

A) 8

B) 10

C) 12

D) 14

E) 16

**PROBLEMA N° 102**

(Práctica)

En la figura,  $AC = 2(BC)$  y  $BD = 5$ .

Hallar AB

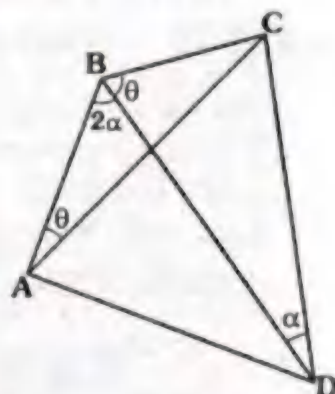
A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 7



**PROBLEMA N° 103**

(Práctica)

ABC es un triángulo isósceles ( $AB = BC$ ), M,

N y H son puntos de  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{AC}$  res-

pectivamente, donde  $MB = 2(AM)$ ,

$MN = MH$ ,  $m\angle NHC = m\angle NMH = 90^\circ$  y

$NH = 4$ . Hallar AC.

A) 2

B) 3

C) 4

D) 5

E) 6

**PROBLEMA N° 104**

(Práctica)

Por los extremos A y D del diámetro de una

semicircunferencia se trazan tangentes. Una

tangente interseca a las otras dos en B y C

respectivamente. Hallar la distancia traza-

da del punto de tangencia al diámetro, si

$AB = 10$  y  $CD = 6$ .

A) 7,5

B) 7

C) 6,5

D) 8,5

E) 8

**PROBLEMA N° 105**

(Seminario)

En un triángulo ABC, se traza la bisectriz

$\overline{CF}$  y luego por F, una paralela a  $\overline{AC}$ , de

modo que intercepta a  $\overline{BC}$  en Q. Si

$BC = 5m$  y  $AC = 6m$ , entonces la magnitud

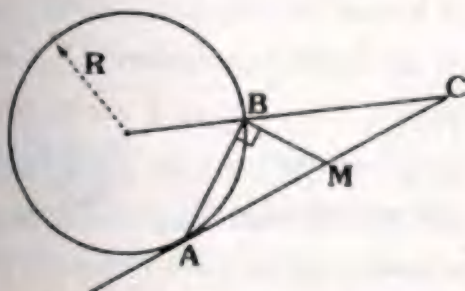
de  $\overline{BQ}$  (en m).

- A)  $\frac{1}{11}$  B)  $\frac{5}{11}$  C)  $\frac{9}{11}$   
 D)  $\frac{20}{11}$  E)  $\frac{25}{11}$

**PROBLEMA N° 106** (Examen parcial)

En la figura mostrada,  $AM=5u$  y  $MC=4u$ . Halle el radio de la circunferencia.

- A) 3,75u  
 B) 4u  
 C) 4,5u  
 D) 4,75u  
 E) 5,25u



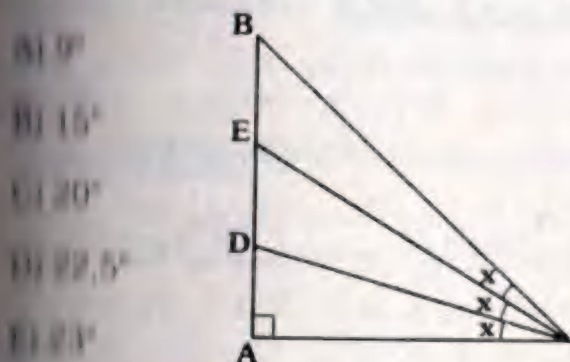
**PROBLEMA N° 107** (Seminario)

Sea la circunferencia de centro O y diámetro AB,  $FH \perp AB$ ,  $AQ \cap FH = \{M\}$ , F y Q son puntos de la circunferencia, si  $AF=6u$  y  $AM=5u$ ,  $FH \cap \text{circunferencia} = \{N\}$ . Halle  $(FM)(MN)$ .

- A)  $13u^2$  B)  $9u^2$  C)  $12u^2$   
 D)  $10u^2$  E)  $11u^2$

**PROBLEMA N° 108** (Seminario)

En la figura,  $DE+2(AD)=EB$ . Hallar x.



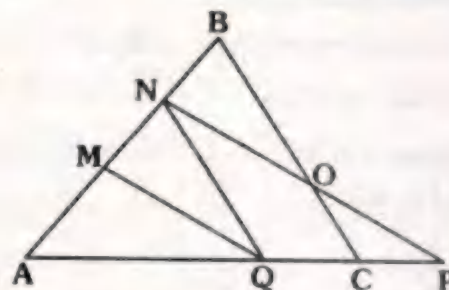
- A)  $9^\circ$   
 B)  $15^\circ$   
 C)  $20^\circ$   
 D)  $22,5^\circ$   
 E)  $30^\circ$

**PROBLEMA N° 109**

(Seminario)

En la figura,  $\overline{MQ} \parallel \overline{NP}$ ,  $\overline{NQ} \parallel \overline{BC}$ ,  $AQ=12(CP)$ ,  $AM=4u$  y  $BN=2,5u$ . Calcule  $OP/ON$ .

- A)  $1/3$   
 B)  $1/4$   
 C)  $1/5$   
 D)  $1/2$   
 E)  $2/5$

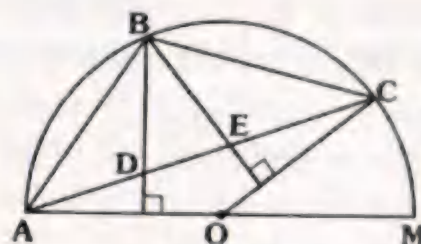


**PROBLEMA N° 110**

(Seminario)

En la figura O es centro. Halle la  $m\angle ABC$ , si  $AD \cdot EC = 16u^2$  y  $DE=4$ .

- A)  $110^\circ$   
 B)  $120^\circ$   
 C)  $135^\circ$   
 D)  $150^\circ$   
 E)  $165^\circ$



**PROBLEMA N° 111**

(Seminario)

Sea el triángulo BAC isósceles ( $\overline{BA} \cong \overline{AC}$ ), en la prolongación de  $\overline{BC}$  se ubica el punto D tal que  $CD=BC$ . En el lado  $\overline{AB}$  se ubican los puntos E y F tal que:  $EA=EB$  y  $FA = \frac{AB}{3}$ . Los segmentos ED y FD interceptan al lado  $\overline{AC}$  en los puntos G y H; los segmentos EH y FG se interceptan en el punto M y la prolongación de  $\overline{DM}$  interceptan al lado  $\overline{AB}$  en el punto K. Si  $AB=10u$ , entonces la longitud de EK (en u) es:



- A) 1                      B) 1,5                      C) 2  
D) 2,5                      E) 3

**PROBLEMA N° 112 (Práctica)**

En un triángulo ABC isósceles ( $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ ), se traza la altura  $\overline{AH}$ . Se ubica P en  $\overline{AH}$  tal que  $m\angle BPC = 90^\circ$ . Si  $AC = \ell$ , entonces PC es:

- A)  $\frac{\ell}{2}$                       B)  $\frac{2\ell}{3}$                       C)  $\frac{\ell\sqrt{2}}{3}$   
D)  $\frac{\ell\sqrt{2}}{2}$                       E)  $\frac{3\ell}{4}$

**PROBLEMA N° 113 (Práctica)**

En un triángulo ABC, donde  $BC = 2AB$ , se traza la altura  $\overline{BH}$  tal que  $m\angle HBC = 3m\angle ABH$ . Si  $AH = 2$ , halle HC.

- A) 8                      B) 9                      C) 10  
D) 12                      E) 16

**PROBLEMA N° 114 (Práctica)**

En un triángulo ABC, si  $m\angle B = 120^\circ$ ,  $AB = 5\text{cm}$  y  $BC = 15\text{cm}$ . Se traza la bisectriz interior  $\overline{BE}$ . Halle la longitud de  $\overline{BE}$  (en cm).

- A)  $\frac{15}{12}$                       B)  $\frac{15}{10}$                       C)  $\frac{15}{8}$   
D)  $\frac{15}{4}$                       E) 15

**PROBLEMA N° 115 (Seminario)**

Por el incentro de un triángulo ABC se trazan dos rectas paralelas hacia  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$ ; las cuales interceptan a  $\overline{AC}$  en los puntos M y

- N respectivamente. Si  $AB = 10\text{cm}$ ,  $BC = 14\text{cm}$  y  $AC = 12\text{cm}$ . Halle MN (en cm)  
A) 1                      B) 2                      C) 3  
D) 4                      E) 5

**PROBLEMA N° 116 (Seminario)**

En una recta L se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D con diámetros  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  se trazan las semicircunferencias  $C_1$  y  $C_2$  en un mismo semiplano,  $L_2$  es recta tangente a  $C_1$  y  $C_2$  en T y S respectivamente, las prolongaciones de  $\overline{TB}$  y  $\overline{SC}$  se interceptan en el punto Q, en  $\overline{TS}$  se ubica E de manera que  $m\angle TBE = 90^\circ$ ,  $TB = 8u$ ,  $TE = 4ES$ . Halle BQ en u.

- A) 1,5                      B) 2                      C) 3  
D) 4                      E) 5

**PROBLEMA N° 117 (Examen parcial)**

ABCD y DEFG son cuadrados en donde A, D y G pertenecen a la recta L, la prolongación de  $\overline{BE}$  intercepta a  $\overline{FG}$  en P y L en Q, si  $BE = 5u$  y  $EP = 2u$ , halle PQ en u.

- A)  $\frac{2}{5}$                       B)  $\frac{5}{7}$                       C)  $\frac{4}{3}$   
D) 3                      E) 4

**PROBLEMA N° 118 (Examen parcial)**

En un triángulo ABC,  $2BC = 7AB$  se traza la altura BH de manera que la  $m\angle HBC = 3m\angle ABH$ , halle AH/HC.

- A)  $\frac{1}{8}$                       B)  $\frac{1}{4}$                       C)  $\frac{1}{2}$   
D)  $\frac{2}{3}$                       E)  $\frac{5}{7}$

**PROBLEMA N° 119**

(Seminario)

En un triángulo ABC se trazan las cevianas interiores  $\overline{AN}$ ,  $\overline{BQ}$  y  $\overline{CM}$ .

( $N \in \overline{BC}$ ;  $Q \in \overline{AC}$ ;  $M \in \overline{AB}$ ) concurrentes en I.

Si  $\frac{MB}{MA} + \frac{BN}{NC} = \frac{3}{4}$ , entonces  $\left(\frac{BI}{IQ}\right)$  es.

- A)  $\frac{3}{8}$                       B)  $\frac{3}{7}$                       C)  $\frac{1}{2}$   
D)  $\frac{2}{3}$                       E)  $\frac{5}{7}$

**PROBLEMA N° 120**

(Seminario)

En un triángulo ABC se trazan las alturas  $\overline{AQ}$ ,  $\overline{CP}$  y  $\overline{BF}$ . La recta PQ intercepta a la altura  $\overline{BF}$  en el punto T, a la prolongación de  $\overline{CA}$  en el punto R. Si  $QT=3u$  y  $TP=2u$ , entonces PR es:

- A)  $8u$                       B)  $9u$                       C)  $10u$   
D)  $11u$                       E)  $12u$

**PROBLEMA N° 121**

(Seminario)

En un triángulo rectángulo ABC se trazan dos rectas perpendiculares a la hipotenusa  $\overline{AC}$  en los puntos P y Q las cuales son tangentes a la circunferencia inscrita al triángulo ( $AP < AQ$ ); tal que  $APCQ = 72u^2$ .

Calcule el radio de dicha circunferencia.

- A) 4                      B) 8                      C) 5  
D) 6                      E)  $4\sqrt{2}$

**PROBLEMA N° 122**

(Seminario)

Sea una circunferencia de centro I, inscrita en un triángulo ABC,  $AB=13\text{cm}$ ,  $BC=14\text{cm}$  y  $AC=15\text{cm}$ .  $P \in \overline{BC}$  y es punto de tangencia,  $Q \in \overline{BC}$  tal que  $\overline{AQ}$  es bisectriz del

ángulo A. Calcule PQ.

- A)  $\frac{1}{6}$                       B)  $\frac{1}{5}$                       C)  $\frac{1}{4}$   
D)  $\frac{1}{3}$                       E)  $\frac{1}{2}$

**PROBLEMA N° 123**

(Seminario)

Sea el trapezoide asimétrico ABCD, M y N son puntos medios de las diagonales  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$ ; E y F pertenecen a  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  tal que E, M, N y F son colineales.  $BE=3$ ,  $AE=9$  y  $FD=4$ . Halle FC.

- A) 10                      B) 11                      C) 12  
D) 13                      E) 14

**PROBLEMA N° 124**

(Seminario)

En un cuadrilátero convexo ABCD,  $m\angle A = 90^\circ$ , por B y C se trazan las rectas paralelas a  $\overline{DC}$  y  $\overline{AB}$  que interceptan a sus diagonales en M y N respectivamente. Si  $MC=17u$  y  $CN=15u$ . Halle MN en u:

- A) 6                      B) 7                      C) 8  
D) 9                      E) 10

**PROBLEMA N° 125**

(Seminario)

En un triángulo ABC; se traza la mediana  $\overline{BM}$ , en los triángulos ABM y BMC se trazan las bisectrices  $\overline{AD}$  y  $\overline{CE}$  (D y E están en  $\overline{BM}$ ). Si  $BD=3$ ,  $EM=2$  y  $\frac{AB+AC}{AC} = \frac{3}{2}$ . Halle DE.

- A)  $\frac{1}{5}$                       B)  $\frac{1}{4}$                       C)  $\frac{1}{3}$   
D)  $\frac{1}{2}$                       E) 1



**PROBLEMA N° 126**

(Práctica)

En un triángulo rectángulo ABC recto en B, I es el incentro,  $IA=7$ ,  $IC=8\sqrt{2}$ . Halle IB

- A)  $2\sqrt{3}$       B)  $3\sqrt{2}$       C) 4  
D)  $\frac{56}{17}\sqrt{2}$       E) 5

**PROBLEMA N° 127**

(Práctica)

Desde un punto exterior A; de una circunferencia C, se trazan la tangente  $\overline{AT}$  y la secante AQN, B está en la prolongación  $\overline{TQ}$  tal que  $m\angle BNQ = m\angle TAQ$ ,  $\overline{BN} \cap C = \{M\}$ , si  $AT=16$  y  $BM=4$ , halle MT.

- A) 4      B) 6      C) 8  
D) 10      E) 12

**PROBLEMA N° 128**

(Práctica)

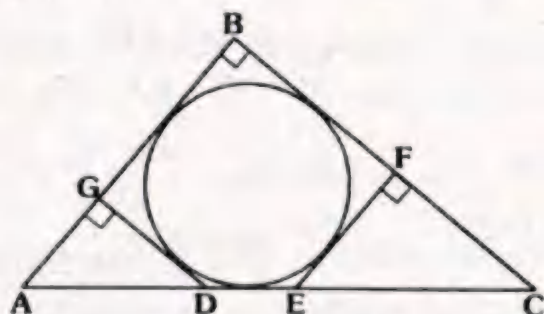
El perímetro de un triángulo ABC es 25, la bisectriz interior  $AD=10$  y  $BC=5$ . Halle la distancia del incentro al vértice A.

- A) 8      B) 9      C) 10  
D) 11      E) 12

**PROBLEMA N° 129**

(Seminario)

En la figura  $AD=4$  y  $EC=5$ , halle DE. (aproximadamente).



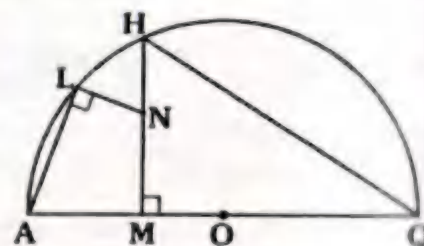
- A) 1,50      B) 1,80      C) 1,84  
D) 1,90      E) 1,92

**PROBLEMA N° 130**

(Seminario)

En la figura  $\overline{MN} \cong \overline{NH}$ , si:  $HQ = 2\sqrt{6}$  y  $OQ=3$ . Halle la longitud de  $\overline{LN}$ .

- A)  $\sqrt{2}$   
B)  $2\sqrt{2}$   
C)  $\sqrt{3}$   
D)  $\sqrt{6}$   
E)  $2\sqrt{3}$



**PROBLEMA N° 131**

(Seminario)

En un triángulo ABC, recto en B se traza la altura BH, luego se ubican los puntos medios, M de  $\overline{BC}$  y N de  $\overline{BH}$  tal que  $AM=2AN$ . Halle la  $m\angle C$ .

- A) 15      B) 20      C) 25  
D) 30      E) 35

**PROBLEMA N° 132**

(Examen parcial)

En el triángulo ABC escaleno,  $BC=2$  y  $AB+AC=10$ , siendo E el excentro relativo a  $\overline{BC}$ . Si por E se traza una paralela a  $\overline{BC}$  de manera que intercepte a las prolongaciones de  $\overline{AC}$  y  $\overline{AB}$  en P y Q respectivamente. Halle PQ.

- A) 2,0      B) 2,5      C) 3  
D) 4      E) 5

**PROBLEMA N° 133**

(Examen parcial)

En un triángulo ABC, la mediatriz de  $\overline{AC}$  intercepta a  $\overline{BC}$  en P y a la prolongación de  $\overline{AB}$  en Q. Si  $OP \times OQ = 36m^2$ . Halle el radio si O es el circuncentro.

- A) 3m      B) 4m      C) 5m  
D) 6m      E)  $3\sqrt{2}m$

**PROBLEMA N° 134** (Examen parcial)

En un triángulo ABC la bisectriz del ángulo BAC intercepta a  $\overline{BC}$  en D. Si  $AB - BD = a$  y  $AC + CD = b$ . Halle AD.

- A)  $a + b$       B)  $2a - b$       C)  $2\sqrt{ab}$   
D)  $\sqrt{ab}$       E)  $\sqrt{\frac{ab}{2}}$

**PROBLEMA N° 135** (Examen parcial)

En un triángulo ABC se trazan las alturas CH y AH; en  $\overline{AC}$  se ubica el punto E y en el exterior y relativo a  $\overline{AC}$  se ubica el punto D tal que  $ED = EC$ ,  $T \in \overline{MD}$ ,  $ET \perp \overline{MD}$ ,  $m\angle ACB = m\angle MDE$ ,  $MT = TD$ , si  $ET = 5$ . Calcule AH.

- A) 5      B) 7      C) 9  
D) 10      E) 11

**PROBLEMA N° 136** (Seminario)

En un paralelogramo ABCD se traza una recta que pasa por el vértice D e intercepta a  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$  y a la prolongación de  $\overline{AB}$  en los puntos R, Q y P respectivamente. Si  $QH = 3u$ ,  $RD = 4u$ . Halle PQ (en u)

- A)  $1/3$       B)  $2/3$       C)  $4/3$   
D)  $5/3$       E)  $7/3$

**PROBLEMA N° 137** (Seminario)

Se tiene una circunferencia inscrita en un triángulo ABC,  $AB = 9\text{cm}$ ,  $BC = 7\text{cm}$  y  $AC = 8\text{cm}$ ,  $M \in \overline{AB}$  y  $N \in \overline{BC}$  tal que  $\overline{MN}$  es tangente a la circunferencia  $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ . Halle MN

- A)  $1/3$       B)  $2/3$       C)  $4/3$   
D)  $5/3$       E)  $8/3$

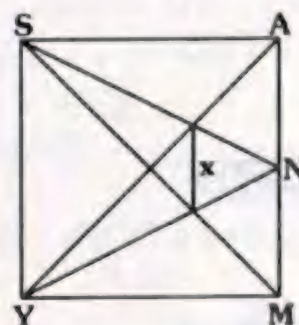
**PROBLEMA N° 138** (Seminario)

Sea una circunferencia inscrita en un trapezoide asimétrico ABCD,  $M \in \overline{AB}$  y  $N \in \overline{CD}$  tal que M y N son puntos de tangencia  $\overline{MN} \cap \overline{AC} : \{I\}$ ,  $AM = 4\text{cm}$ ,  $IC = 10\text{cm}$  y  $NC = 8\text{cm}$ . Halle AI (en cm).

- A)  $\sqrt{2}$       B)  $\sqrt{3}$       C) 2  
D)  $\sqrt{5}$       E) 5

**PROBLEMA N° 139** (Seminario)

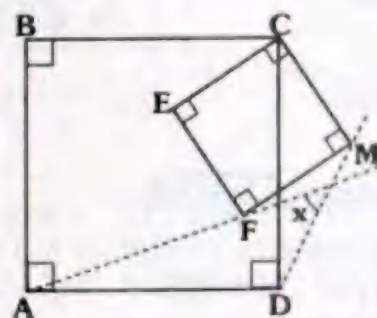
SAMY es un cuadrado de lado " $\ell$ ". N es punto medio de AM. Calcule x en función de  $\ell$ .



- A)  $\frac{2\ell}{3}$       B)  $\frac{\ell}{3}$       C)  $\frac{3\ell}{2}$   
D)  $\frac{3\ell}{4}$       E)  $\frac{\ell}{2}$

**PROBLEMA N° 140** (Seminario)

En la figura ABCD y EFMC son cuadrados. Calcule x.



- A)  $22^\circ 30'$   
B)  $30^\circ$   
C)  $37^\circ$   
D)  $45^\circ$   
E)  $60^\circ$





# Problemas Resueltos

## Ciclo Semestral

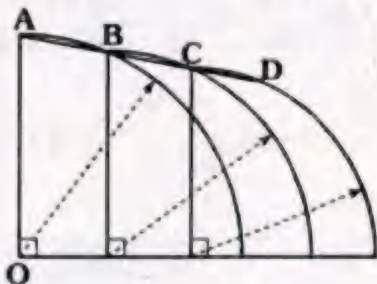
### PROBLEMA N° 141

En el triángulo ABC, se ubica D en  $\overline{BC}$  y E en la prolongación de  $\overline{AC}$ . Si  $m\angle ABC = m\angle CDE$  y  $2(AC) = 3(CE)$ . Calcule  $AB/DE$ .

- A)  $\frac{2}{3}$                       B)  $\frac{3}{2}$                       C) 1  
D)  $\frac{1}{3}$                       E) 2

### PROBLEMA N° 142

En el gráfico,  $AB = a$  y  $BC = b$ . Calcule  $CD$ .

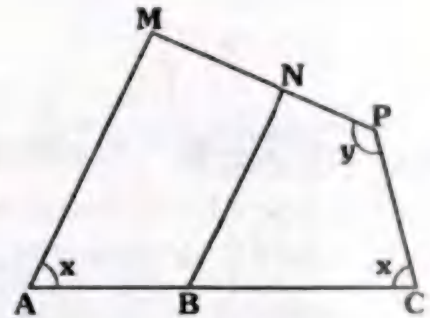


- A)  $\frac{b^2}{a}$                       B)  $b\sqrt{\frac{a}{b}}$   
C)  $\frac{\sqrt{ab}}{2}$                       D)  $\sqrt{2ab}$   
E)  $\sqrt{ab}$

### PROBLEMA N° 143

En el gráfico, ABNM es un trapecio. Si  $2(MN) = 3(NP)$ ,  $AB = 6$ ,  $BC = 12$ ,  $PC = 5$  y  $x + y > 180^\circ$ . Calcule  $x$ .

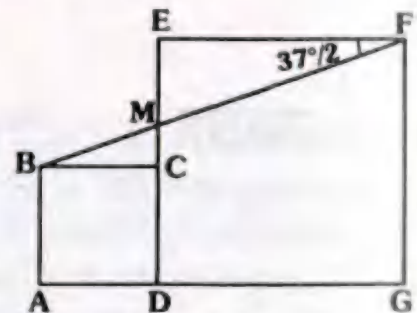
- ❖ A)  $37^\circ$   
❖ B)  $45^\circ$   
❖ C)  $53^\circ$   
❖ D)  $30^\circ$   
❖ E)  $60^\circ$



### PROBLEMA N° 144

En el gráfico, ABCD y DEFG son cuadrados. Calcule  $BM/MF$ .

- ❖ A)  $1/3$   
❖ B)  $2/3$   
❖ C)  $1/2$   
❖ D)  $3/4$   
❖ E)  $2/5$



### PROBLEMA N° 145

Se tiene el triángulo ABC, se ubica D en  $\overline{AC}$ . Se cumple  $m\angle DBC = 60^\circ + m\angle ABD$ ,  $m\angle BDC = 30^\circ$  y  $(BD)^2 = (AB)(BC)$ . Calcule  $m\angle BAC$ .

- ❖ A)  $15^\circ$                       B)  $10^\circ$                       C)  $30^\circ$   
❖ D)  $18^\circ 30'$                       E)  $26^\circ 31'$

### PROBLEMA N° 146

Sea el triángulo rectángulo ABC (recto en B). Se traza la altura BH, L es un punto de





**PROBLEMA N° 152**

Se tiene el triángulo ABC, se trazan exteriormente los rectángulos ABEF y BCPQ semejantes (en ese orden). Si  $\overline{AP} \cap \overline{FC} = \{H\}$ , calcule la medida del ángulo entre  $\overline{BH}$  y  $\overline{AC}$ .

- A)  $ED$                       B)  $60^\circ$                       C)  $90^\circ$   
D)  $45^\circ$                       E)  $106^\circ$

**PROBLEMA N° 153**

Se tiene el triángulo ABC, se trazan exteriormente los triángulos equiláteros ABE y BCD. Si  $\overline{AD} \cap \overline{EC} = \{Q\}$  y la prolongación de  $\overline{BQ}$  corta a  $\overline{AC}$  en P,  $AQ=2$ ;  $QD=9$  y  $EQ=8$ . Calcule  $\frac{AP}{PC}$ .

- A) 1                      B)  $\frac{3}{2}$                       C)  $\frac{2}{3}$   
D)  $\frac{2}{9}$                       E)  $\frac{8}{9}$

**PROBLEMA N° 154**

Se tiene el cuadrilátero convexo ABCD, se ubica P en  $\overline{AD}$  y Q en  $\overline{BC}$ , tal que  $\frac{AP}{PD} = \frac{AB}{CD} = \frac{BQ}{QC}$ . Si la medida del ángulo entre  $\overrightarrow{PQ}$  y  $\overrightarrow{AB}$  es  $\theta$ , calcule la medida del ángulo entre  $\overrightarrow{PQ}$  y  $\overrightarrow{CD}$ .

- A)  $\theta$                       B)  $\frac{\theta}{2}$   
C)  $2\theta$                       D)  $45^\circ - \theta$   
E)  $90^\circ - \theta$

**PROBLEMA N° 155**

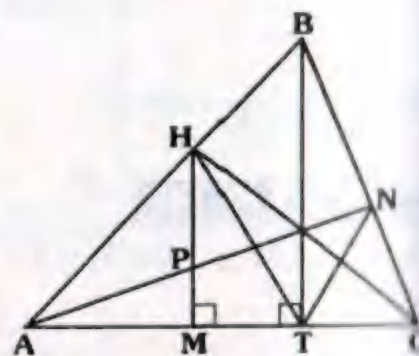
En el triángulo acutángulo ABC, se trazan las alturas  $\overline{AP}$  y  $\overline{CQ}$  secantes en H, M y N son las proyecciones ortogonales de Q y P sobre  $\overline{AC}$  respectivamente. Si  $BQ=2(QA)$ ,  $2(PC)=3(PB)$  y  $AS=5$ , calcule NC.

- A) 9                      B) 12                      C) 18  
D) 21                      E) 27

**PROBLEMA N° 156**

En el gráfico,  $AP=PN$ ,  $TN=a$  y  $HT=b$ . Calcule  $HP/PM$ .

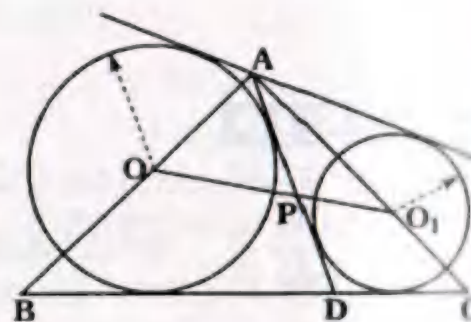
- A)  $\frac{b}{a}$   
B)  $\frac{2b-a}{a}$   
C)  $\frac{2a-b}{b}$   
D)  $\frac{2b}{a}$   
E)  $\frac{a}{b}$



**PROBLEMA N° 157**

Si  $\frac{AO_1}{O_1C} + \frac{AO}{OB} = a$ , calcule  $\frac{AP}{PD}$

- A)  $a/2$   
B)  $1/a$   
C)  $a$   
D)  $2a$   
E)  $2/a$



**PROBLEMA N° 158**

Se tienen los ángulos consecutivos  $\angle AOB$  y  $\angle BOC$ , se ubica  $N$  en  $\overline{OC}$  y  $M$  en  $\overline{OB}$  tal que  $m\angle ANM = m\angle ACB = \theta$  y  $m\angle NMA = m\angle ABC = 90^\circ$ .  
Calcule  $m\angle AOC$ .

- A)  $0$       B)  $90^\circ - \theta$       C)  $90^\circ + \theta$   
D)  $90^\circ$       E)  $60^\circ$

**PROBLEMA N° 159**

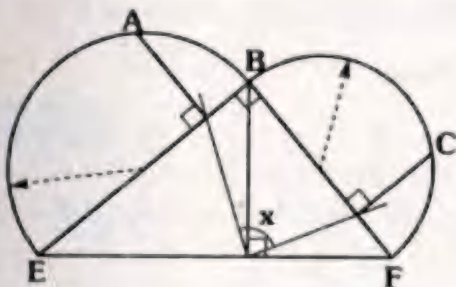
Dado el triángulo  $ABC$ , se ubican los puntos  $M$  y  $N$  en  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$  respectivamente, tal que los ángulos  $\angle BAC$  y  $\angle MNC$  son suplementarios. Si  $3(AB) = 5(MN)$ ,  $NC = 6$  y  $AC = 16$ . Calcule la longitud de la proyección de  $\overline{AB}$  sobre  $\overline{AC}$ .

- A) 1      B) 2      C) 3  
D) 4      E)  $\sqrt{3}$

**PROBLEMA N° 160**

En el gráfico,  $m\widehat{AB} + m\widehat{BC} = 180^\circ$ . Calcule  $x$ .

- A)  $135^\circ$   
B)  $120^\circ$   
C)  $105^\circ$   
D)  $106^\circ$   
E)  $90^\circ$



**PROBLEMA N° 161**

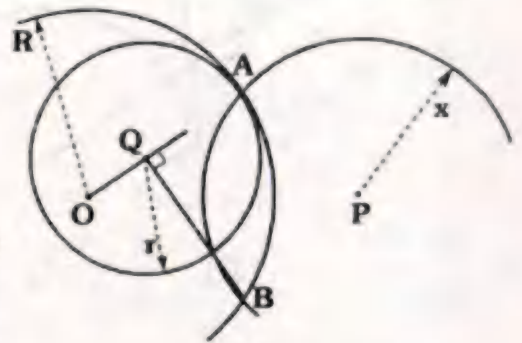
Se tiene el triángulo rectángulo  $ABC$  (recto en  $B$ ) se traza la altura  $BH$ ,  $D$  está en  $\overline{BC}$  tal que  $\overline{AD}$  es bisectriz del  $\angle BAC$ ,  $I$  es incentro del triángulo  $AHB$ . Si  $BI \cap BH = \{P\}$  y  $2(AC) = 3(DC)$ . Calcule  $\angle AIP$ .

- ❖ A)  $2/3$       B)  $3/2$       C) 1  
❖ D) 2      E)  $1/3$

**PROBLEMA N° 162**

En el gráfico,  $A$  es punto de tangencia.  
Calcule  $x$ .

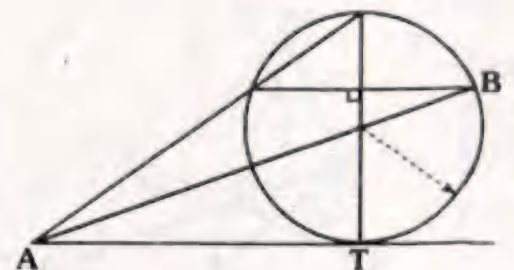
- ❖ A)  $R+r$   
❖ B)  $R-r$   
❖ C)  $\sqrt{Rr}$   
❖ D)  $\sqrt{2Rr}$   
❖ E)  $2\sqrt{Rr}$



**PROBLEMA N° 163**

En el gráfico,  $T$  es punto de tangencia y  $AT = a$ . Calcule  $AB$ .

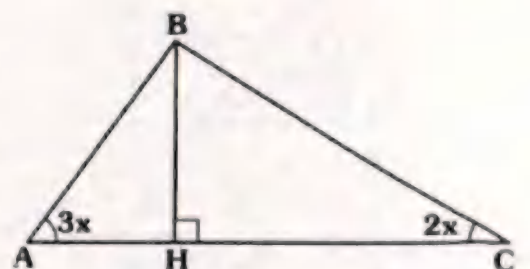
- ❖ A)  $a$   
❖ B)  $a\sqrt{2}$   
❖ C)  $a\sqrt{3}$   
❖ D)  $2a$   
❖ E)  $\frac{3}{2}a$



**PROBLEMA N° 164**

En el gráfico,  $BC = 2(AH)$ . Calcule  $x$ .

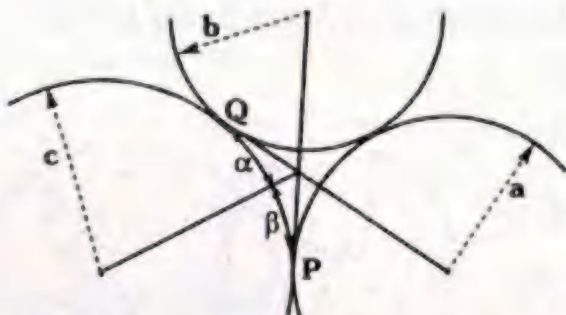
- ❖ A)  $10^\circ$   
❖ B)  $12^\circ$   
❖ C)  $15^\circ$   
❖ D)  $16^\circ$   
❖ E)  $22,5^\circ$





**PROBLEMA N° 165**

En el gráfico, P, Q y T son puntos de tangencia. Calcule  $\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta}$



- A)  $\frac{a(b+c)}{b(a+c)}$       B)  $\frac{ab}{b+c}$       C)  $\frac{b(a+c)}{a(b+c)}$   
 D)  $\left( \frac{ab+bc+ac}{a^2+b^2+c^2} \right) c$       E)  $\frac{ab}{c}$

**PROBLEMA N° 166**

Si  $BM=MP$ , calcule  $\frac{BD}{QC}$

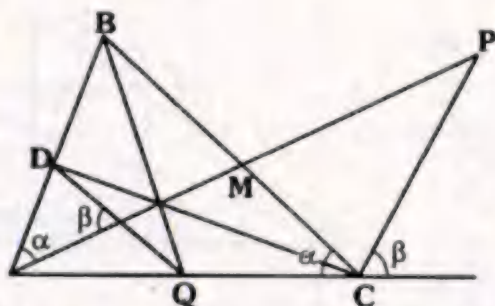
A)  $1/3$

B) 3

C) 2

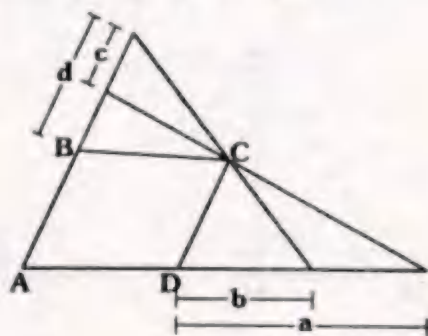
D) 1

E)  $1/2$



**PROBLEMA N° 167**

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo. Indique la relación correcta.

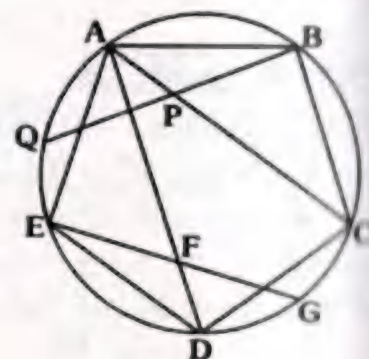


- ❖ A)  $ad=bc$       B)  $ac=bd$   
 ❖ C)  $a(d-c)=db$       D)  $d(a-b)=ca$   
 ❖ E)  $a-b=d-c$

**PROBLEMA N° 168**

En el gráfico, ABCDE es un pentágono regular. Si  $BP=a$ ,  $PQ=b$  y  $EF=c$ , calcule FG

- ❖ A)  $\frac{a^2+b^2+c^2}{a}$   
 ❖ B)  $\frac{a^2+b^2+c^2}{c}$   
 ❖ C)  $\frac{a^2+c^2-ab}{c}$   
 ❖ D)  $\frac{a^2+ab-c^2}{c}$   
 ❖ E)  $\frac{a^2+bc-c^2}{b}$



**PROBLEMA N° 169**

Se tiene el cuadrado ABCD, se ubica P en  $\overline{BC}$  y en  $\overline{AP}$  se ubica M tal que  $AB=MP$ . La altura MH y la bisectriz AF del triángulo ABM se intersectan en Q. Si  $\overleftrightarrow{BQ} \cap \overleftrightarrow{AM} = \{N\}$ ,  $MH=a$  y  $AB=b$ , calcule la distancia de N a  $\overline{CD}$ .

- ❖ A)  $a+b$       B)  $\sqrt{a^2+b^2}$   
 ❖ C)  $\frac{2b-a}{2}$       D)  $\sqrt{ab}$   
 ❖ E)  $\frac{2a-b}{2}$

**PROBLEMA N° 170**

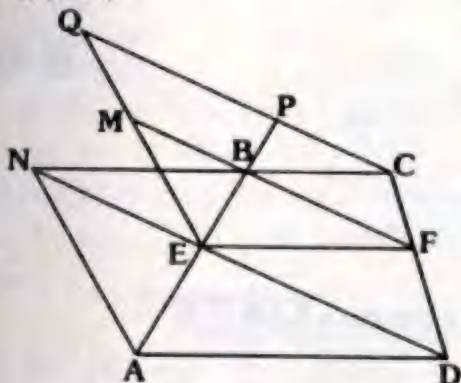
Se tiene el triángulo ABC de incentro I, se traza la bisectriz interior CD, se traza el paralelogramo ADEF tal que  $E \in \overline{BC}$ ,  $F \in \overline{AC}$ ,  $I \in \overline{EF}$ ,  $IF=a$  y  $BE=b$ . Calcule BD.

- A)  $\frac{b}{a}(a+b)$     B)  $\frac{a}{b}(a+b)$     C)  $\frac{a^2}{b}$   
 D)  $\frac{a}{b}(a+2b)$     E)  $\frac{b}{a}(a+2b)$

**PROBLEMA N° 171**

En el gráfico,  $\overline{BC} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{AD}$ ,  $\overline{PC} \parallel \overline{BF} \parallel \overline{ND}$ ,  $\overline{MQ} = \overline{MB}$ ,  $\overline{AN} = \overline{AD}$  y  $(PQ)(AD) = k$ .  
 Calcule  $(EQ)(BN)$ .

- A)  $2k$   
 B)  $1/k$   
 C)  $k$   
 D)  $k\sqrt{2}$   
 E)  $k/2$



**PROBLEMA N° 172**

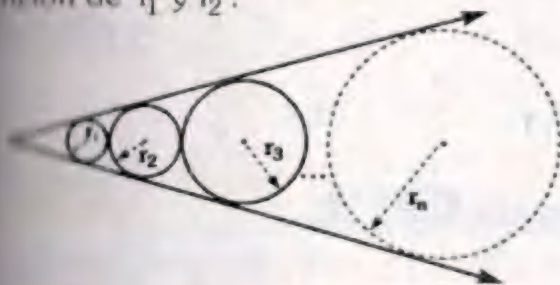
Se tiene el cuadrado ABCD, P está en la prolongación de  $\overline{DC}$ , Q en  $\overline{BP}$ ,  $\overline{AP} \cap \overline{BC} = \{R\}$  y  $m\angle QCA = 90^\circ$ .

Calcule  $m\angle RAD + m\angle QRP$

- A)  $45^\circ$     B)  $60^\circ$     C)  $75^\circ$   
 D)  $90^\circ$     E)  $120^\circ$

**PROBLEMA N° 173**

En el gráfico, cada circunferencia es tangente a los lados del ángulo y la circunferencia de radio  $r_2$  es tangente a la circunferencia de radio  $r_1$ ; la de radio  $r_3$ , tangente a la de radio  $r_2$  y así sucesivamente. Calcule  $r_n$  en función de  $r_1$  y  $r_2$ .

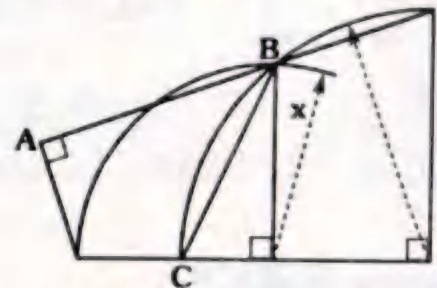


- ❖ A)  $r_1^{-n} r_2^{-n+1}$     B)  $r_1^{-n} r_2^{n-1}$     C)  $r_1^{n-1} r_2^{n-1}$   
 ❖ D)  $r_1^{n-1} r_2^{2-n}$     E)  $r_2^{n-1} r_1^{2-n}$

**PROBLEMA N° 174**

En el gráfico,  $(AB)(BC) = 12\sqrt{2}$ , calcule x.

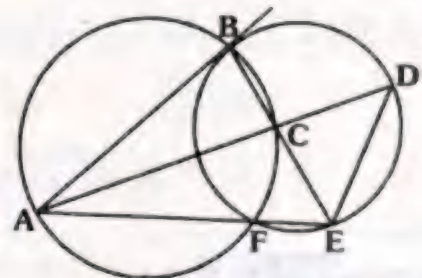
- ❖ A)  $2\sqrt{3}$   
 ❖ C)  $4\sqrt{3}$   
 ❖ C)  $2\sqrt{2}$   
 ❖ D)  $6\sqrt{2}$   
 ❖ E)  $3\sqrt{2}$



**PROBLEMA N° 175**

En el gráfico, B es punto de tangencia,  $AC = 6\sqrt{2}$  y  $AF = 8$ , calcule ED.

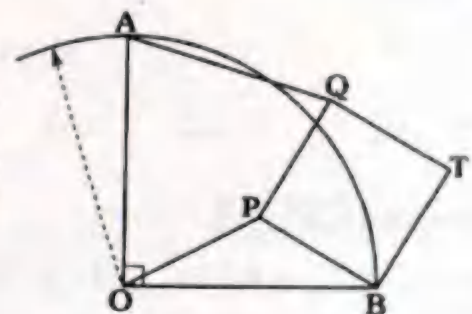
- ❖ A) 2  
 ❖ B) 3  
 ❖ C)  $3\sqrt{2}$   
 ❖ D)  $3\sqrt{3}$   
 ❖ E)  $2\sqrt{3}$



**PROBLEMA N° 176**

En el gráfico, PQTB es cuadrado y  $OP = 10$ , calcule AQ.

- ❖ A) 10  
 ❖ B) 28,14  
 ❖ C) 14,14  
 ❖ D) 17,3  
 ❖ E) 20





**PROBLEMA N° 177**

Se tiene el cuadrilátero convexo ABCD, se ubica P y Q en  $\overline{BC}$  y  $\overline{AD}$  respectivamente, las prolongaciones de  $\overline{QP}$  y  $\overline{DC}$  se cortan en M.

Si:  $m\angle BAD + m\angle ADC = 140^\circ$  y

$\frac{AB}{CD} = \frac{BP}{PC} = \frac{AQ}{QD}$ . Calcule  $m\angle QMD$ .

- A)  $10^\circ$       B)  $20^\circ$       C)  $40^\circ$   
D)  $25^\circ$       E)  $50^\circ$

**PROBLEMA N° 178**

Se tiene un triángulo ABC ( $AB=BC$ ) y un cuadrado PQRT inscrito en el ( $\overline{PT}$  está contenido en  $\overline{AC}$ ). La prolongación de  $\overline{AR}$  intersecta a la bisectriz exterior que parte de "B" en "S". Si  $\overline{BH} \perp \overline{AC}$ ;  $BH=4$ , calcular BS.

- A) 2      B) 3      C) 4  
D) 5      E) 6

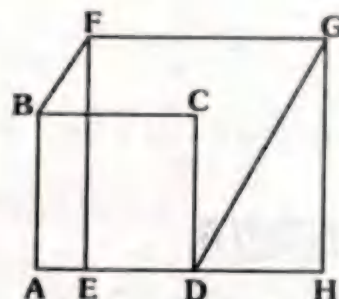
**PROBLEMA N° 179**

Dado un triángulo ABC ( $AB=AC$ ), la circunferencia inscrita es tangente al lado AB en P. Por P se traza  $\overline{PM} \perp \overline{AC}$  (M en  $\overline{AC}$ ). Si la altura CH mide 10, calcule PM.

- A) 10      B)  $5\sqrt{2}$       C) 5  
D) 4      E) 2,5

**PROBLEMA N° 180**

Calcular "AE", si  $AB=a$ ,  $GH=b$ ,  $\overline{BF} \parallel \overline{DG}$  y ABCD, EFGH son cuadrados.

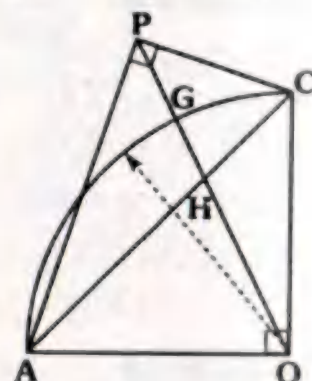


- A)  $\frac{(b-a)^2}{a}$       B)  $\frac{(b-a)^2}{2b}$   
C)  $\frac{a(b-a)^2}{(a+b)^2}$       D)  $\frac{(a+b)^2}{2a}$   
E)  $\frac{(a+b)^3}{2ab}$

**PROBLEMA N° 181**

Del gráfico, calcule OA, si  $OP=34$  y  $13(PG)=17(GH)$ .

- A) 18  
B) 26  
C)  $15\sqrt{2}$   
D)  $10\sqrt{3}$   
E)  $5\sqrt{2}$



**PROBLEMA N° 182**

En un triángulo ABC recto en B de incentro I;  $\overline{BP}$  es bisectriz interior. Si  $BI=4$ ,  $IP=3$ , calcular AC.

- A)  $5\sqrt{2}$       B)  $5\sqrt{3}$       C) 10  
D)  $12\sqrt{2}$       E) 7

**PROBLEMA N° 183**

Calcular AF, si  $FE=4m$ ,  $BE=6m$  y  $AD=DC$ .

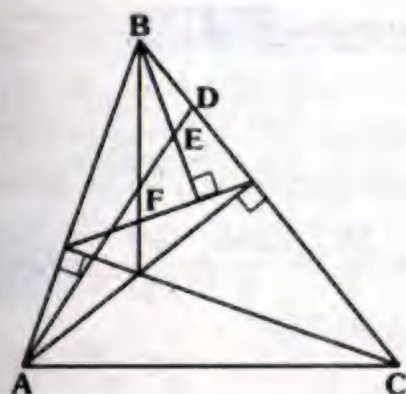
A) 9 m

B)  $\sqrt{24}$  m

C) 12 m

D) 5 m

E) 10 m



**PROBLEMA N° 184**

Se tiene un triángulo ABC cuyos lados midan:  $AB=c$ ,  $BC=a$  y  $AC=b$ , se traza una recta tangente a la circunferencia inscrita y paralela al lado AB, que intersecta a  $\overline{BC}$  y a  $\overline{AC}$  en "E" y "F" respectivamente. Por la intersección de  $\overline{AE}$  y  $\overline{FB}$  se traza una paralela a  $\overline{AB}$  que intersecta a  $\overline{BC}$  y a  $\overline{AC}$  en "M" y "N" respectivamente. Calcular MN.

A)  $\frac{c(a+b-c)}{a+c}$

B)  $\frac{c(a+b-c)}{a+b}$

C)  $\frac{c(a+c-b)}{a+b}$

D)  $\frac{c(a+b-c)}{b+c}$

E)  $\frac{c(a+b-c)}{b-c}$

**PROBLEMA N° 185**

En la figura, H es ortocentro del triángulo ABC. Calcule "x", si  $AC=2(EP)$ .

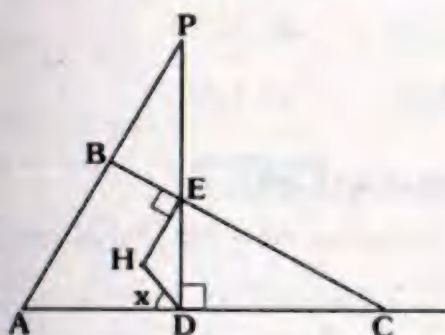
A)  $45^\circ$

B)  $53^\circ/2$

C)  $30^\circ$

D)  $127^\circ/2$

E)  $60^\circ$



**PROBLEMA N° 186**

En un triángulo ABC de incentro "I";  $m\angle A = 73^\circ$ ;  $m\angle C = 39^\circ$ . Calcular IB, si  $AB=c$ ,  $BC=a$ ,  $AC=b$ .

A)  $\frac{(a+c)b}{a+b+c}$  B)  $\frac{c(a+c)}{a+b+c}$  C)  $\frac{bc}{a+c}$

D)  $\frac{b(b+c)}{a+b+c}$  E)  $\frac{(a+b)c}{a+c-b}$

**PROBLEMA N° 187**

Según el gráfico,  $AM=a$  y  $CH=b$ . Calcule CM.

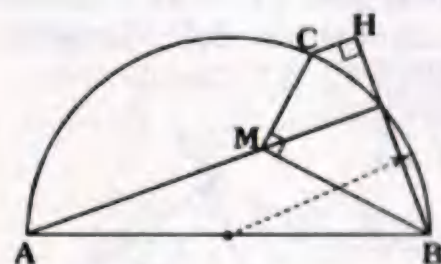
A)  $a+b$

B)  $\sqrt{ab}$

C)  $\sqrt{2ab}$

D)  $2\sqrt{ab}$

E)  $\sqrt{a^2+b^2}$



**PROBLEMA N° 188**

En el gráfico, T y P son puntos de tangencia. Si  $AM=3(MN)=6$ . Calcule NP.

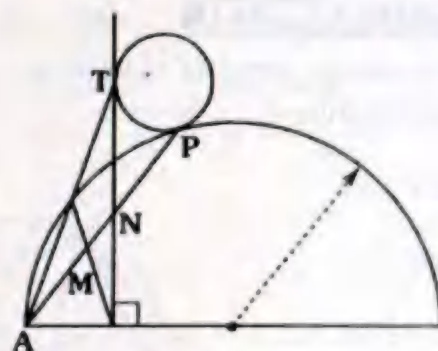
A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

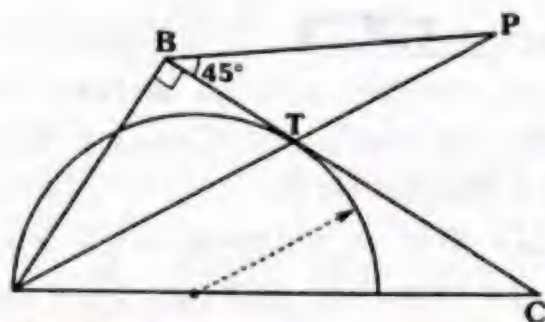
E) 5



**PROBLEMA N° 189**

En el gráfico, T es punto de tangencia. Si  $TC=4(TB)$ , calcule  $PT/TA$ .



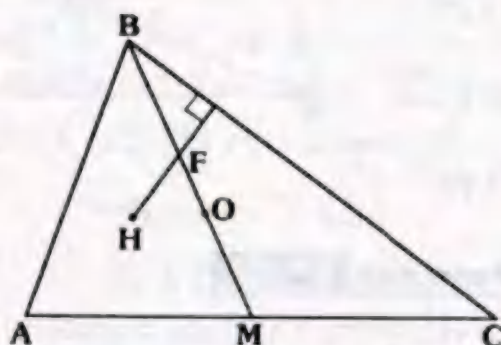


- A)  $\frac{\sqrt{5}}{5}$       B)  $\frac{2}{5-\sqrt{3}}$       C)  $\frac{5}{5-\sqrt{5}}$   
 D)  $\frac{\sqrt{7}}{3}$       E)  $\frac{\sqrt{15}}{5-\sqrt{15}}$

**PROBLEMA N° 190**

En el gráfico, H es ortocentro y O es circuncentro del triángulo ABC. Si  $(BM)(FM)=12$ . Calcule AM.

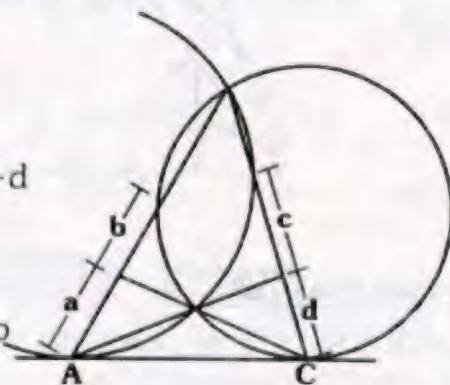
- A)  $\sqrt{3}$   
 B)  $2\sqrt{3}$   
 C)  $3\sqrt{3}$   
 D)  $4\sqrt{2}$   
 E)  $3\sqrt{2}$



**PROBLEMA N° 191**

A y C son puntos de tangencia. Indique la relación entre a, b, c y d.

- A)  $ab=cd$   
 B)  $ad=bc$   
 C)  $a+b=c+d$   
 D)  $ac=bd$   
 E)  $a^2c=d^2b$



**PROBLEMA N° 192**

En el triángulo ABC, la altura BH y las cevianas AM y CN concurren en P, en la prolongación de HM se ubica Q de modo que  $\frac{HQ}{9} = \frac{BH}{6} = \frac{NH}{4}$  y  $BQ=27$ . Calcule NB.

- A) 10      B) 12      C) 16  
 D) 18      E) 20

**PROBLEMA N° 193**

Se tiene el triángulo ABC de incentro I, una recta pasa por I y corta a AB en P, a BC en Q y a la prolongación de AC en D. Si  $AB=7$ ,  $BC=5$ ,  $CD=4$  y  $AC=6$ .

Calcule  $\frac{AP}{PB} + \frac{QC}{BQ}$

- A) 2      B)  $\frac{2}{13}$       C)  $\frac{7}{13}$   
 D) 1      E)  $\frac{14}{13}$

**PROBLEMA N° 194**

Se tiene el rectángulo ABCD, N y M son puntos medios de BC y AD respectivamente. Se ubica E en ND y P en la prolongación de NA. Si  $m\angle ABP = m\angle ECD$ .

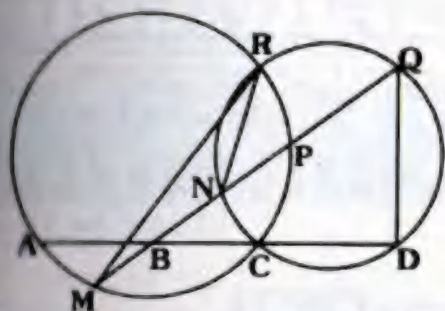
Calcule  $m\angle PMA + m\angle AME$ .

- A)  $180^\circ$       B)  $90^\circ$       C)  $150^\circ$   
 D)  $135^\circ$       E)  $120^\circ$

**PROBLEMA N° 195**

En el gráfico,  $AB=2(CD)$ ,  $BN=a$ ,  $NP=b$  y

$m\widehat{CD} = 2(m\angle MRN)$ . Calcule  $\frac{MB}{PQ}$ .

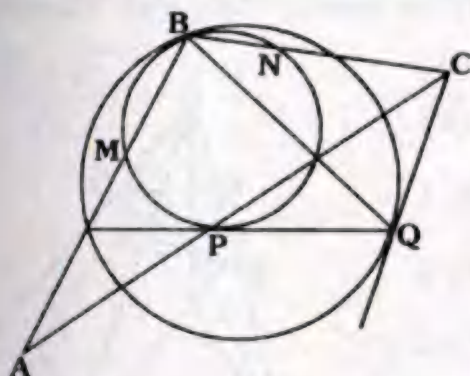


- A)  $\frac{2a}{a+b}$  B)  $\frac{a}{a+b}$  C)  $\frac{b}{a+b}$   
 D)  $\frac{a}{b}$  E)  $\frac{3a}{a+b}$

**PROBLEMA N° 196**

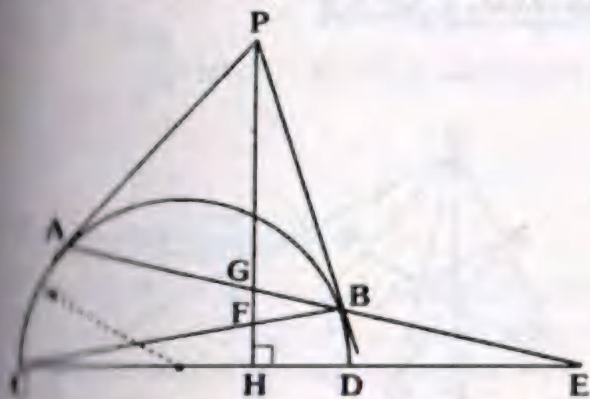
En el gráfico, P, B y Q son puntos de tangencia. Calcule  $\frac{(BN)(AM)}{(NC)(MB)}$

- A) 1  
 B) 2  
 C) 1/5  
 D) 3  
 E) 2/3



**PROBLEMA N° 197**

En el gráfico, A y B son puntos de tangencia. Si  $AB=BE=2(HB)$ . Calcule  $CF/FB$



- ❖ A) 2 B) 3 C) 4  
 ❖ D) 5 E) 8

**PROBLEMA N° 198**

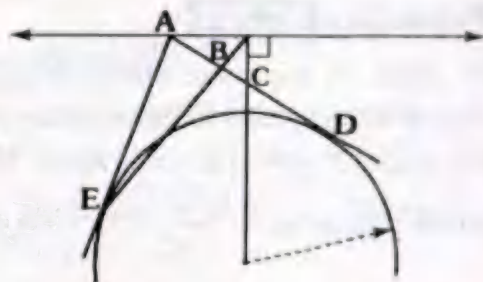
❖ Se tiene el triángulo ABC de incentro I, una recta que pasa por I corta a  $\overline{AB}$  en M y a  $\overline{BC}$  en N. Si  $MB=NB$ ,  $AM=4$  y  $NC=6$ . Calcule MN.

- ❖ A)  $2\sqrt{6}$  B)  $12\sqrt{2}$  C)  $2\sqrt{5}$   
 ❖ D)  $4\sqrt{6}$  E)  $3\sqrt{6}$

**PROBLEMA N° 199**

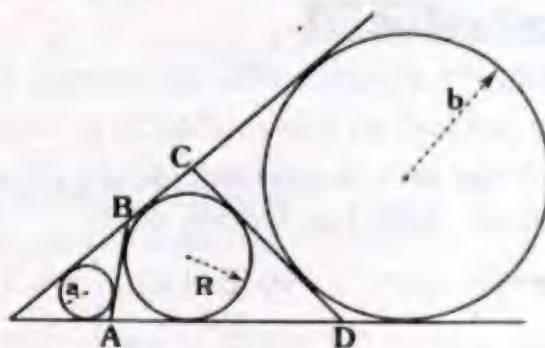
❖ En el gráfico, E y D son puntos de tangencia. Si  $AB=4(BC)=12$ . Calcule CD.

- ❖ A) 3,2  
 ❖ B) 2,8  
 ❖ D) 4  
 ❖ D) 4,5  
 ❖ E) 5



**PROBLEMA N° 200**

❖ En el gráfico, calcule R, si el cuadrilátero ABCD es bicéntrico.



- ❖ A)  $a+b$  B)  $\sqrt{ab}$  C)  $2\sqrt{ab}$   
 ❖ D)  $\sqrt{2ab}$  E)  $\sqrt{a^2+b^2}$





# Problemas Resueltos

Ciclo

Semestral  
Intensivo

## PROBLEMA N° 201

En el triángulo rectángulo ABC (recto en B) se ubica P en  $\overline{AB}$ , tal que  $AP = \sqrt{2}(PB)$  y Q en  $\overline{BC}$  con  $PB=BQ$ . Si  $m\angle ACB = 40^\circ$ , calcule  $m\angle AQP$ .

- A)  $40^\circ$                       B)  $50^\circ$                       C)  $60^\circ$   
D)  $45^\circ$                       E)  $60^\circ$

## PROBLEMA N° 202

Se tiene el triángulo ABC, BV, CW y AU son cevianas interiores concurrentes, X es un punto en  $\overline{UC}$  tal que WAVX es paralelogramo. Si  $\frac{BU}{UC} = k$ . Calcule  $\frac{BX}{XC}$ .

- A) k                              B)  $\frac{1}{k}$                               C) 2k  
D)  $\frac{k}{2}$                               E)  $\sqrt{k}$

## PROBLEMA N° 203

Se tiene un triángulo ABC de incentro I y circuncentro O, tal que  $m\angle ABC = \alpha$ , la recta de Euler del triángulo AIC corta a  $\overline{OI}$  en M, calcule  $IM/MO$  en función de  $\alpha$ .

- A)  $\text{sen}\alpha$                       B)  $2\text{sen}\alpha$   
C)  $4\text{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$                       D)  $2\text{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$   
E)  $\frac{1}{4}\text{sen}^2 \frac{\alpha}{2}$

## PROBLEMA N° 204

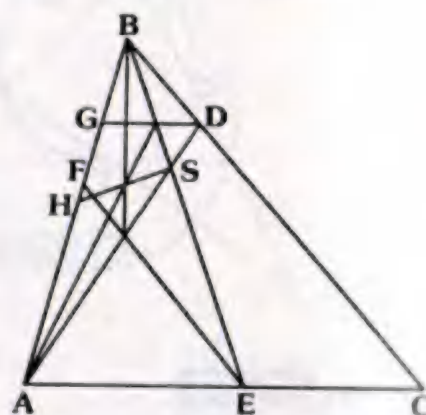
Se tiene el triángulo ABC, se ubican en las regiones exteriores relativa a los lados AB y BC los puntos P y Q respectivamente y M en la región interior, si los triángulos ABP, BQC y AMC son semejantes e isósceles de bases AB, BC y AC respectivamente. Demostrar que MPBQ es un paralelogramo.

## PROBLEMA N° 205

En el gráfico,  $\overline{GD} \parallel \overline{AC}$ ,  $\overline{FE} \parallel \overline{BC}$ . Calcule

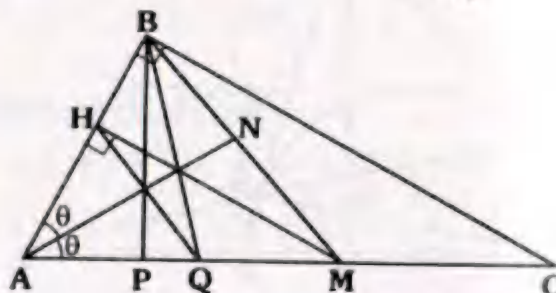
$\frac{BH}{AH}$

- A) 1  
B) 2  
C) 3  
D)  $\frac{2}{3}$   
E)  $\frac{4}{3}$



## PROBLEMA N° 206

En el gráfico,  $AB=MC$ . Halle  $\frac{AP}{PQ}$ .



- A) 2                      B) 1                      C) 3  
D)  $\frac{3}{2}$                       E)  $\frac{2}{3}$

**PROBLEMA N° 207**

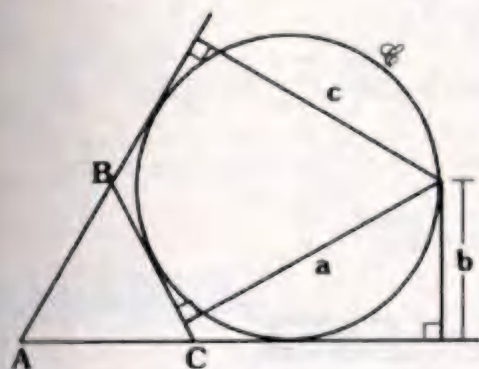
En el triángulo ABC, de ortocentro H y circuncentro O, se traza la altura BM, la proyección de O sobre HM es N, T es punto medio de BC,  $\overleftrightarrow{TN} \cap \overleftrightarrow{AB} = \{K\}$ . Si  $HM = 2(HN)$  y  $BK = 6(KA) = 12$ . Calcule NK.

- A)  $\sqrt{6}$                       B)  $2\sqrt{6}$                       C) 3  
D)  $4\sqrt{6}$                       E) 5

**PROBLEMA N° 208**

En el gráfico,  $\mathcal{C}$  es la circunferencia exinscrita relativa a BC del triángulo equilátero ABC. Calcule  $\frac{\sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt{a}}$

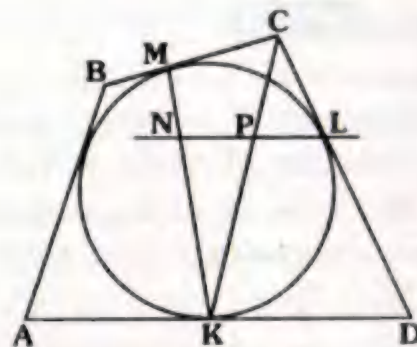
Calcule  $\frac{\sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt{a}}$



- A) 1                      B)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       C)  $\sqrt{3}$   
D) 3                      E)  $\frac{1}{3}$

**PROBLEMA N° 209**

En el gráfico, se muestra el cuadrilátero circunscrito ABCD, si las rectas AD y NL son paralelas. Demuestre:  $NP = PL$ .



**PROBLEMA N° 210**

En el triángulo ABC, con  $m\angle ABC = 60^\circ$ , se ubica el punto de Fermat F, tal que  $AF = a$  y  $FC = b$ . Halle BF.

- A)  $a + b$                       B)  $\sqrt{ab}$                       C)  $\sqrt{a^2 + b^2}$   
D)  $2\sqrt{ab}$                       E)  $\sqrt{2ab}$

**PROBLEMA N° 211**

Sea I un punto coplanar con el triángulo ABC las bisectrices de los ángulos BIC, CIA y AIB cortan a BC, CA y AB en A', B' y C'. Es cierto que:

- A)  $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$   
B)  $AA' = BB' = CC'$   
C)  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$  y  $\overline{CC'}$  concurren.  
D)  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$  y  $\overline{CC'}$  son bisectrices.  
E) por lo menos  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$  ó  $\overline{CC'}$  es mediana.

**PROBLEMA N° 212**

Se tiene el trapecio rectángulo ABCD (recto en A y B) circunscrito. Si  $m\angle DBC = \alpha$  y  $m\angle BCA = \beta$ . Calcule  $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$ .

- A) 1                      B)  $1/2$                       C) 2  
D)  $\sqrt{2}$                       E)  $2\sqrt{2}$



**PROBLEMA N° 213**

Se traza la circunferencia inscrita en el triángulo equilátero ABC, se traza una recta tangente a dicha circunferencia, la cual corta a  $\overline{AB}$  en M y a  $\overline{BC}$  en N; E y F son las proyecciones ortogonales de A y C sobre la recta MN;  $\overline{EC}$  y  $\overline{AF}$  se cortan en H; y  $\overline{AN}$  y  $\overline{MC}$  se cortan en G, la prolongación de  $\overline{HG}$  corta a  $\overline{MN}$  en S. Demostrar que  $HG=GS$ .

**PROBLEMA N° 214**

Se tiene el trapecio ABEC ( $\overline{AC} \parallel \overline{BE}$ ), se ubica P en  $\overline{AB}$ , si  $AB=BC$ ,  $\overline{AE}$  biseca a  $\overline{CP}$  y  $m\angle BPC = \alpha$ . Calcule  $m\angle BCE$ .

- A)  $\alpha$                       B)  $2\alpha$   
C)  $90^\circ - \alpha$               D)  $90^\circ + \alpha$   
E)  $180^\circ - \alpha$

**PROBLEMA N° 215**

En el triángulo ABC,  $AB=c$ ,  $BC=a$  y  $AC=b$ . Si  $3(m\angle BAC) + 2(m\angle ACB) = 180^\circ$ , indique la relación entre a, b y c.

- A)  $a^2 = b^2 - bc$               B)  $a^2 = c^2 - bc$   
C)  $c^2 = a^2 - ab$               D)  $c^2 = b^2 - ab$   
E)  $b^2 = a^2 - bc$

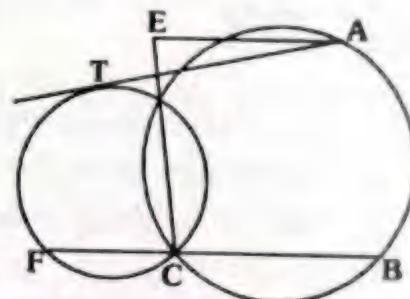
**PROBLEMA N° 216**

En el rectángulo ABCD, se traza  $\overline{BP}$  perpendicular a  $\overline{AC}$  (P en  $\overline{AC}$ ), M y N son puntos medios de  $\overline{PC}$  y  $\overline{AD}$  respectivamente. Calcule  $m\angle BMN$ .

- A)  $60^\circ$                       B)  $120^\circ$                       C)  $90^\circ$   
D)  $135^\circ$                       E)  $45^\circ$

**PROBLEMA N° 217**

En el gráfico, T es punto de tangencia y  $\overline{AE} \parallel \overline{BC}$  si  $AE=3$  y  $BF=4$ . Calcule AT



- A) 5                      B) 7                      C)  $\sqrt{15}$   
D)  $2\sqrt{3}$                       E)  $3\sqrt{2}$

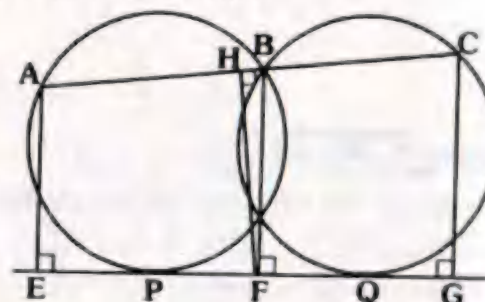
**PROBLEMA N° 218**

En el triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la altura BH, en los triángulos AHB, BHC, APM y CQH se trazan las alturas HP, HQ, PM y QN respectivamente. Si  $AM=a$  y  $NC=c$ , calcule AC.

- A)  $a + b + \sqrt{ab}$                       B)  $\sqrt{2(a^2 + b^2)}$   
C)  $4\sqrt{ab}$                       D)  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$   
E)  $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^3$

**PROBLEMA N° 219**

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Si  $AE=a$ ;  $BF=b$  y  $CG=c$ , calcule HF, en función de a, b y c.



- A)  $\sqrt{abc}$  B)  $\frac{ac}{b}$  C)  $\frac{a^2 + c^2}{2b}$   
 D)  $\frac{\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{c})}{2}$  E)  $\sqrt{\frac{b(a+c)}{2}}$

**PROBLEMA N° 220**

En la prolongación del lado BC del cuadrado AHCD y en  $\overline{AB}$  se ubican los puntos P y M respectivamente, tal que  $\overline{MP} \cap \overline{CD} = \{L\}$ ,  $\angle PMD = 45^\circ$ ,  $CL = 1$  y  $LD = 5$ .

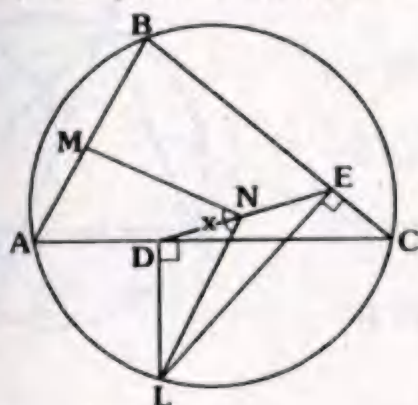
Calcule el menor valor de BM.

- A) 3 B) 2 C) 4  
 D)  $\sqrt{5}$  E)  $\sqrt{3}$

**PROBLEMA N° 221**

En el gráfico,  $AM = MB$  y  $DN = NE$ , calcule x.

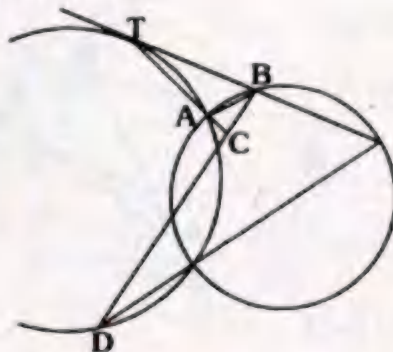
- A)  $120^\circ$   
 B)  $135^\circ$   
 C)  $106^\circ$   
 D)  $108^\circ$   
 E)  $90^\circ$



**PROBLEMA N° 222**

En el gráfico, T es punto de tangencia, si  $AT = a$ ,  $AB = b$ ,  $CB = c$  y  $CD = d$ . Indique la relación entre a, b, c y d.

- A)  $ac = bd$   
 B)  $ab = cd$   
 C)  $ca^2 = db^2$   
 D)  $c^2a = d^2b$   
 E)  $(a+b)d = ca$



**PROBLEMA N° 223**

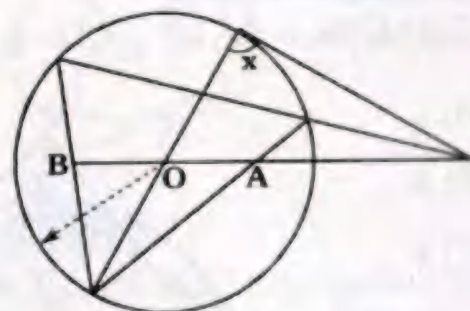
Desde el punto P exterior a la circunferencia de radio R se trazan las tangentes  $\overline{PB}$  y  $\overline{PD}$  (B y D son puntos de tangencia), luego se traza la secante PCA, la proyección de B y D sobre CA son los puntos H y T respectivamente. Si  $(AB)(CD) = \sqrt{K}$  y  $(BH)(TD) = K$ , calcule R.

- A) 1 B) 2 C) 0,5  
 D) 0,25 E)  $\frac{\sqrt{K}}{K}$

**PROBLEMA N° 224**

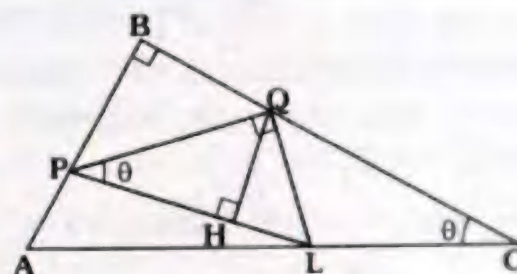
En el gráfico,  $AO = OB$ , calcule x.

- A)  $120^\circ$   
 B)  $90^\circ$   
 C)  $105^\circ$   
 D)  $108^\circ$   
 E)  $106^\circ$



**PROBLEMA N° 225**

Si  $2(AL) = 3(LC)$ ,  $PB = 2(AP)$  y  $PL = 13$ . Calcule QH.

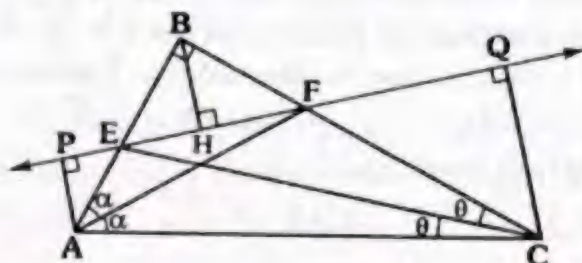


- A)  $7\sqrt{13}$  B)  $2\sqrt{7}$  C)  $10\sqrt{3}$   
 D)  $3\sqrt{10}$  E)  $\sqrt{30}$



**PROBLEMA N° 226**

En el gráfico,  $AE=a$ ,  $CF=b$  y  $\frac{PQ}{AC} = k$ .  
Calcule  $BH$ .

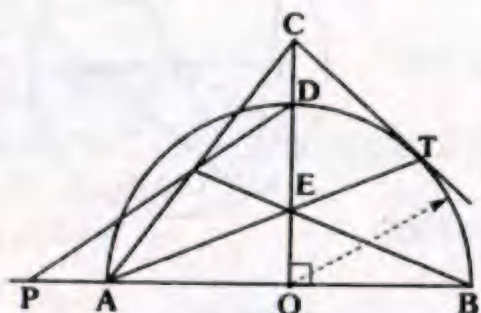


- A)  $\frac{ab}{a+b}$     B)  $k(a+b)$     C)  $\frac{ab}{k(a+b)}$   
D)  $\frac{kab}{a+b}$     E)  $\frac{ka^2}{a+b}$

**PROBLEMA N° 227**

Calcule  $PA$  si  $DE=2$  y  $CD=1$ .

- A) 1  
B) 4  
C) 2  
D)  $3\sqrt{2}$   
E) 3



**PROBLEMA N° 228**

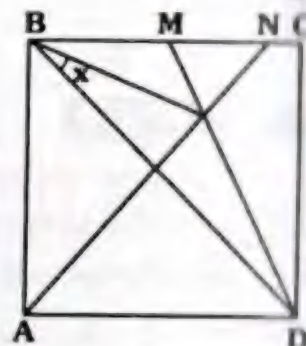
En el triángulo  $ABC$ , la circunferencia inscrita es tangente a  $\overline{AC}$  en  $D$ . Calcule la distancia de  $D$  hacia la recta que contiene a los otros dos puntos de tangencia, si  $m\angle ABC = \alpha$ ,  $AD=a$  y  $DC=b$ .

- A)  $\sqrt{ab} \cdot \sin \alpha$     B)  $2\sqrt{ab} \cdot \cos \alpha$   
C)  $\frac{2ab \cdot \cos \alpha}{a+b}$     D)  $\frac{2ab \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{a+b}$   
E)  $(a+b) \cdot \sin \alpha$

**PROBLEMA N° 229**

Calcule  $x$ , si  $BM=MN$  y  $ABCD$  es un cuadrado.

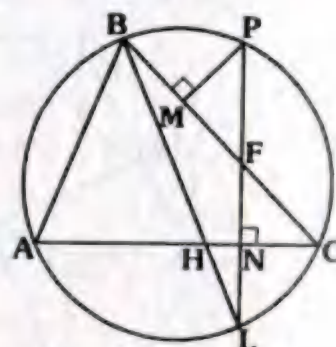
- A)  $8^\circ$   
B)  $22^\circ 30'$   
C)  $26^\circ 30'$   
D)  $15^\circ$   
E)  $18^\circ 30'$



**PROBLEMA N° 230**

En la figura mostrada,  $MC \cdot HL = 54$ ;  $BL = 12$  y  $BF=FC$ . Calcule  $BM$ .

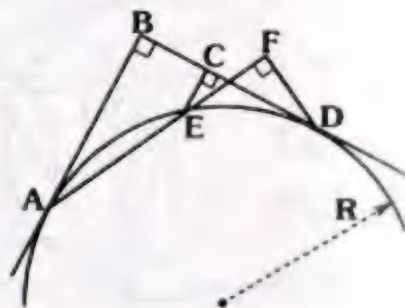
- A) 4  
B) 4,5  
C) 5  
D) 5,5  
E) 6



**PROBLEMA N° 231**

En el gráfico,  $A$  y  $D$  son puntos de tangencia. Calcule el valor de  $R$ , si  $FD=3(EC)=3$ .

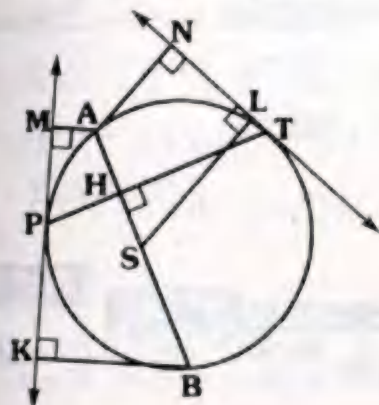
- A) 6  
B) 8  
C)  $2\sqrt{6}$   
D) 9  
E)  $6\sqrt{2}$



**PROBLEMA N° 232**

En la figura, "P" y "T" son puntos de tangencia,  $AM=4$ ,  $AN=5$  y  $BK=10$ . Si  $3(SH) = 5(BS) - 3(AH)$ , calcule SL.

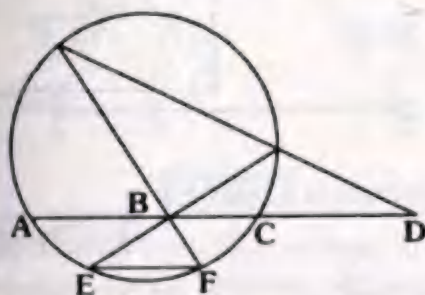
- A) 6,3
- B) 7,2
- C) 8,4
- D) 9,8
- E) 7,4



**PROBLEMA N° 233**

Del gráfico, calcule CD, si  $AB=6$ ,  $BC=4$  y  $AD \parallel EF$ .

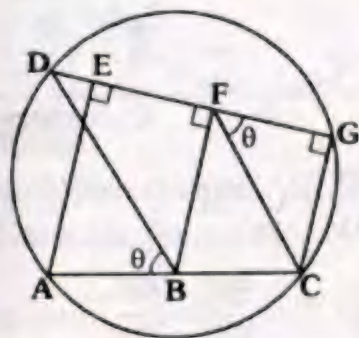
- A) 10
- B)  $2\sqrt{6}$
- C) 7
- D) 8
- E) 9



**PROBLEMA N° 234**

Del gráfico, calcule BF, si  $(AE)(CG)=15$  y  $(AB)(BC)-(EF)(FG)=3$ .

- A) 3
- B) 4
- C) 6
- D)  $2\sqrt{3}$
- E)  $3\sqrt{2}$



**PROBLEMA N° 235**

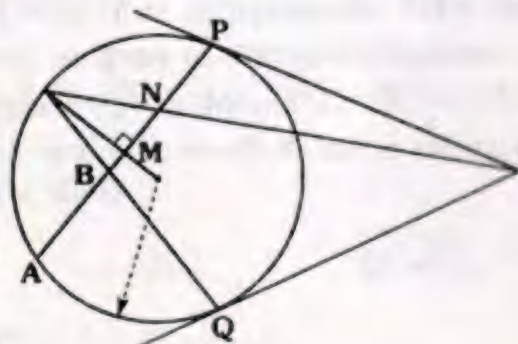
Dado el triángulo rectángulo ABC (recto en B). En los lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{AC}$  se ubican los puntos D, E y F respectivamente. Si  $AF=3(FC)$ ,  $AD=2(DB)$ ,  $m\angle FEC=m\angle DEB$  y  $EC=12$ . Calcule EB.

- A) 6
- B) 4
- C) 5
- D) 9
- E) 10

**PROBLEMA N° 236**

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Calcule  $AB/MN$ .

- A) 2
- B) 3
- C)  $\sqrt{2}$
- D)  $2\sqrt{2}$
- E) 3



**PROBLEMA N° 237**

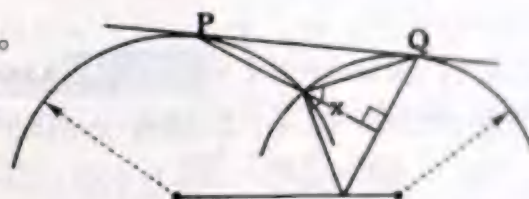
Se tiene el rombo ABCD de centro O,  $m\angle BAD = 60^\circ$ , se ubica P y Q en  $\overline{BC}$  y  $\overline{CD}$  tal que  $m\angle PAQ = 30^\circ$ . Calcule  $m\angle POQ$ .

- A)  $60^\circ$
- B)  $90^\circ$
- C)  $120^\circ$
- D)  $135^\circ$
- E)  $106^\circ$

**PROBLEMA N° 238**

En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Calcule x.

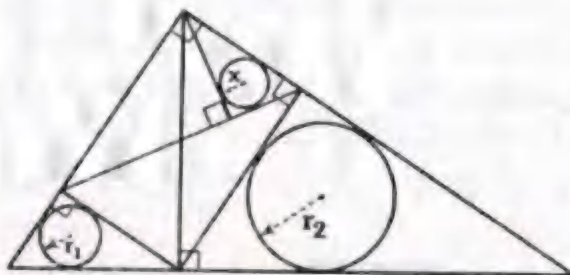
- A)  $60^\circ$
- B)  $120^\circ$
- C)  $90^\circ$
- D)  $75^\circ$
- E)  $74^\circ$





**PROBLEMA N° 239**

Calcule  $x$ , en:



- A)  $r_1 \sqrt{\frac{r_2}{r_1 + r_2}}$       B)  $r_2 \sqrt{\frac{r_1}{r_1 + r_2}}$   
 C)  $\frac{r_1^2}{r_1 + r_2}$       D)  $\frac{r_2^2}{r_1 + r_2}$   
 E)  $\frac{r_1^2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$

**PROBLEMA N° 240**

En un triángulo acutángulo  $ABC$  de ortocentro  $H$ , se trazan  $\overline{HM} \parallel \overline{BA}$  y  $\overline{HN} \parallel \overline{BC}$ , tal que  $M$  y  $N$  están en  $\overline{AC}$ , si  $AM + NC = 2(MN)$  y  $m\angle BCA = 40^\circ$ .

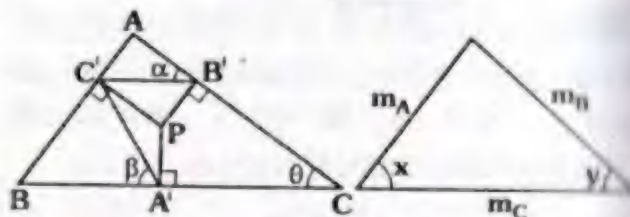
Calcule la medida del ángulo entre  $\overline{BC}$  y la recta de Euler del triángulo  $ABC$ .

- A)  $20^\circ$       B)  $60^\circ$       C)  $40^\circ$   
 D)  $80^\circ$       E)  $50^\circ$

**PROBLEMA N° 241**

En el gráfico,  $m_A$ ,  $m_B$  y  $m_C$  son las longitudes de las medianas del  $\triangle ABC$ , trazadas desde  $A$ ,  $B$  y  $C$  respectivamente.

Si  $\frac{PA'}{BC} = \frac{PB'}{AC} = \frac{PC'}{AB}$ , calcule  $x + y$ .

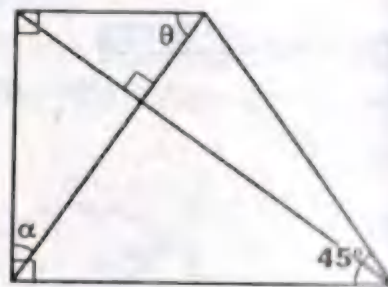


- A)  $\alpha + \beta + \theta$       B)  $\alpha + \beta - \theta$   
 C)  $180^\circ + \theta - \alpha - \beta$       D)  $90^\circ + \theta - \alpha - \beta$   
 E)  $180^\circ - \alpha - \beta - \theta$

**PROBLEMA N° 242**

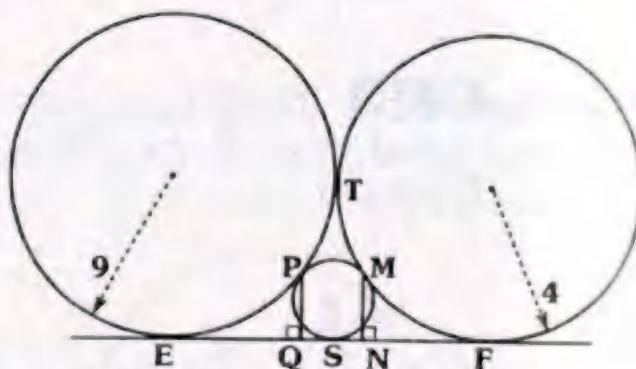
En el gráfico, calcule  $\theta - \alpha$ .

- A)  $45^\circ$   
 B)  $37^\circ$   
 C)  $22,5^\circ$   
 D)  $18,5^\circ$   
 E)  $26,5^\circ$



**PROBLEMA N° 243**

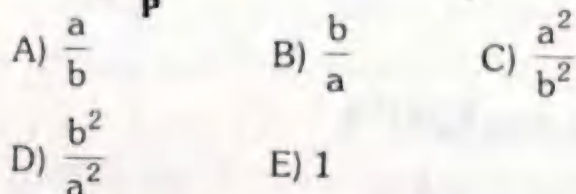
En el gráfico, calcule  $PQ/MN$ . ( $E, T, F, M, P$  y  $S$  son puntos de tangencia)



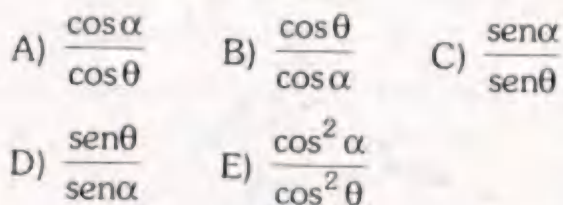
- A)  $\frac{36}{31}$       B)  $\frac{2}{3}$       C) 1  
 D)  $\frac{5}{4}$       E)  $\frac{34}{29}$







En el gráfico,  $\mathcal{C}$  es la circunferencia inscrita. Calcule  $\frac{EL}{LF}$  en función de  $\alpha$  y  $\theta$ .



Se tiene el cuadrado ABCD, M es punto medio de  $\overline{AB}$ , P está en  $\overline{BC}$ , Q en  $\overline{CD}$  y O es centro del cuadrado. Si  $m\angle MPB = \alpha$  y  $m\angle POQ = 45^\circ$ , calcule  $m\angle AQD$ .

- A)  $45^\circ + \alpha$     B)  $45^\circ + 2\alpha$     C)  $2\alpha$   
D)  $90^\circ - \alpha$     E)  $\alpha$

- ❖ Se tiene el triángulo ABC de circuncentro
- ❖ O y E es el excentro relativo a  $\overline{BC}$ , la recta
- ❖ de Euler del  $\triangle BEC$  corta a  $\overline{OE}$  en S.

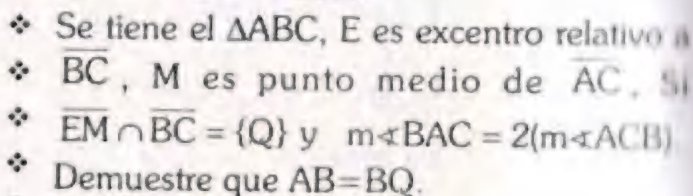
- ❖ Si  $m \angle BAC = \alpha$ , calcule OS/SE.

- ❖ A)  $\frac{1}{4} \csc^2 \frac{\alpha}{2}$       B)  $\frac{1}{4} \sec^2 \frac{\alpha}{2}$

- ❖ C)  $\frac{1}{4} \csc^2 \alpha$       D)  $\frac{1}{4} \sec^2 \alpha$

- ❖ E)  $\frac{\text{sen} \alpha}{4}$

❖ Si  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ , demuestre:  $x = y$ .

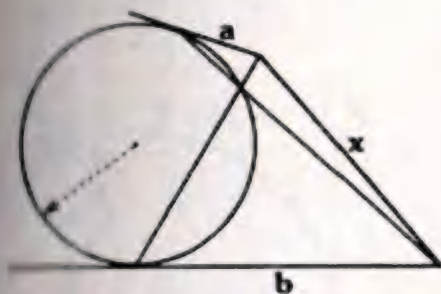


❖ Sea el triángulo ABC de baricentro G, se trazan exteriormente los triángulos equiláteros ABP y BCQ de centros N y M. Calcule  $m\angle MGN$ .

- A)  $60^\circ$  B)  $90^\circ$   
 C)  $100^\circ$  D)  $105^\circ$   
 E)  $120^\circ$

**PROBLEMA N° 257**

En A y B son puntos de tangencia, calcule x.

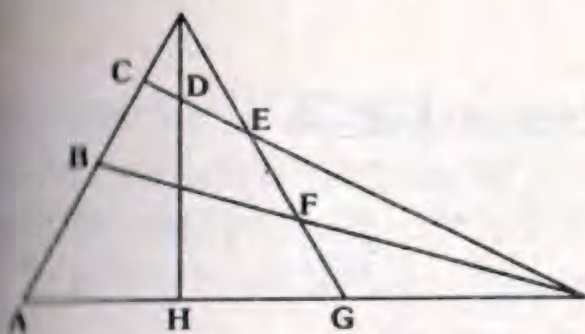


- A)  $\sqrt{a^2 + b^2}$  B)  $\sqrt{ab}$   
 C)  $\sqrt{a^2 + ba + b^2}$  D)  $\sqrt{a^2 - ba + b^2}$   
 E)  $\sqrt{2ab}$

**PROBLEMA N° 258**

En el gráfico, halle:

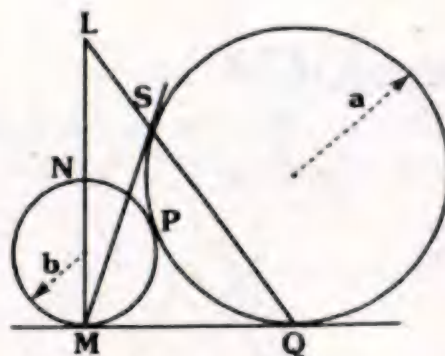
$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FG} \cdot \frac{GH}{HA}$$



- A) 1 B)  $\frac{1}{2}$  C) 2  
 D)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  E) F.D.

**PROBLEMA N° 259**

En el gráfico, M, S, P y Q son puntos de tangencia. Calcule  $\frac{MN}{NL}$ .



- A)  $\frac{a}{b}$  B)  $\frac{2a}{b}$  C)  $\frac{a^2}{b^2}$   
 D)  $\frac{b^2}{a^2}$  E) 1

**PROBLEMA N° 260**

Se tiene el triángulo ABC (escaleno) se trazan las bisectrices interiores  $\overline{CC_1}$  y  $\overline{BB_1}$ , luego las exteriores  $\overline{CC_2}$  y  $\overline{BB_2}$ .

Con diámetros  $\overline{C_1C_2}$  y  $\overline{B_1B_2}$  se trazan semicircunferencias secantes en P.

P se proyecta sobre  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{AC}$ .  
 ¿Qué tipo de triángulo es el que tiene como vértices dichas proyecciones?

- A) Semejante al  $\Delta ABC$ .  
 B) Triángulo rectángulo.  
 C) Triángulo isósceles.  
 D) Sus ángulos internos son  $90^\circ - \frac{A}{2}$ ,  $90^\circ - \frac{B}{2}$   
 E) Equilátero





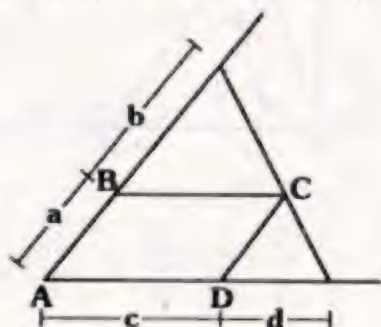
# Problemas Resueltos

Ciclo

## Repaso

### PROBLEMA N° 261

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo indique la relación entre  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ .

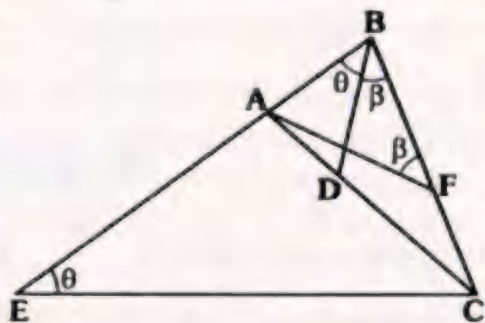


- A)  $ad=bc$       B)  $(a+b)d=(c+d)a$   
 C)  $a(a+b)=c(c+d)$     D)  $d(a+d)=b(c+b)$   
 E)  $ac=bd$

### PROBLEMA N° 262

En el gráfico,  $AF=4$  y  $EC=6$ . Calcule  $BD$ .

- A) 1  
 B) 2  
 C) 2,4  
 D) 3  
 E) 4,8

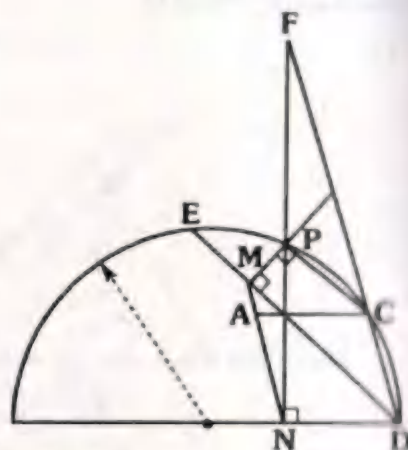


### PROBLEMA N° 263

En el gráfico,  $2(AN)=3(AM)$  y  $CD=6$ . Calcule  $CF$ .

120

- ❖ A) 8
- ❖ B) 6
- ❖ C) 9
- ❖ D) 12
- ❖ E) 10



### PROBLEMA N° 264

- ❖ Se tiene el cuadrado ABCD, N es punto medio de  $\overline{AD}$ , L está en  $\overline{AB}$  tal que
- ❖  $m\angle CNL = 90^\circ$ ,  $\overline{NC} \cap \overline{BD} = \{S\}$ , la prolongación de  $\overline{LS}$  corta a  $\overline{CD}$  en M.
- ❖ Calcule  $\frac{CM}{MD}$ .

- A) 1      B)  $\frac{3}{5}$       C)  $\frac{5}{3}$   
 D)  $\frac{5}{6}$       E)  $\frac{6}{5}$

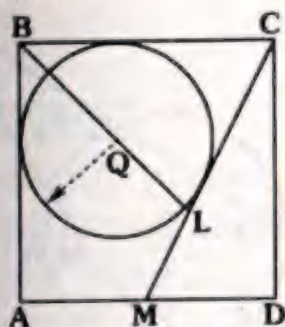
### PROBLEMA N° 265

- ❖ En el triángulo ABC, se ubica P en  $\overline{AC}$  y Q en  $\overline{AB}$ , tal que  $AQ=PC$ ,  $AP=BC$ ,
- ❖  $m\angle QPB = m\angle PCB$ ,  $PQ=3$  y  $PB=4$ .
- ❖ Calcule  $BC/PC$ .

- A) 1      B)  $\frac{4}{3}$       C)  $\frac{1}{2}$   
 D)  $\frac{3}{2}$       E) 3

**PROBLEMA N° 266**

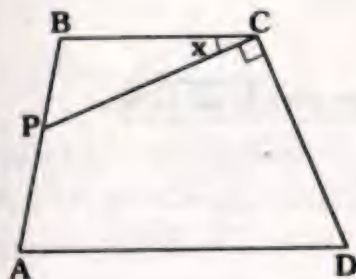
En ABCD es un cuadrado y  $AM = MD$ .  
Calcule  $BQ/QL$ .



- A) 2                      B)  $\sqrt{5}$                       C)  $\frac{3}{\sqrt{5}}$   
D)  $\frac{2}{\sqrt{5}}$                       E)  $\frac{4}{\sqrt{5}}$

**PROBLEMA N° 267**

En el gráfico,  $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ,  $PC = CD$  y  $\angle P = 3(\angle PA)$ . Calcule  $x$ .



- A)  $8^\circ$   
B)  $37^\circ$   
C)  $16^\circ$   
D)  $22,5^\circ$   
E)  $18,5^\circ$

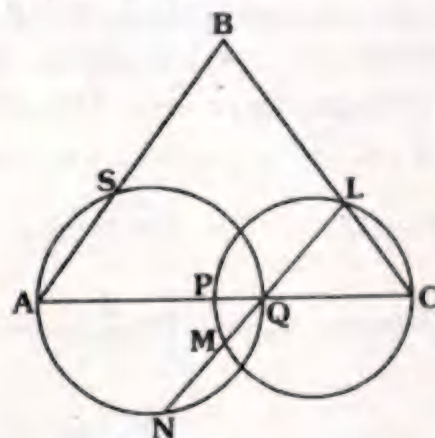
**PROBLEMA N° 268**

En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior BD, M es punto medio de  $\overline{AB}$ , I es incentro del triángulo ABC. Si  $m\angle ACB = 2(m\angle MDB)$ . Calcule  $BI/ID$ .

- A)  $\frac{1}{2}$                       B) 1                      C) 2  
D)  $\frac{2}{3}$                       E) 3

**PROBLEMA N° 269**

Si  $AB = BC$ ,  $AP = 5(PQ) = 5$ ,  $MN = 2(MQ)$  y  $2(QC) = 3(LC)$ . Calcule AS.



- A) 3  
B) 4  
C)  $9/2$   
D)  $11/2$   
E)  $5/2$

**PROBLEMA N° 270**

En el rectángulo ABCD, M y N son puntos medios de  $\overline{BC}$  y  $\overline{CD}$  respectivamente. Si  $AM = 2\sqrt{2}$  y  $BN = \sqrt{17}$ . Si P es la intersección de  $\overline{AM}$  y  $\overline{BN}$ , el valor de  $PM + PN$  es:

- A)  $\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{17}}{5}$                       B)  $\frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{17}}{5}$   
C)  $\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{17}}{5}$                       D)  $\frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{17}}{5}$   
E)  $\frac{3\sqrt{2} + 3\sqrt{17}}{5}$

**PROBLEMA N° 271**

En el trapecio rectángulo ABCD (recto en A y D) sus diagonales se intersecan perpendicularmente en E. Si  $AD = 3$  y  $AE = 1$ . Determinar la proyección de  $\overline{BC}$  sobre  $\overline{DC}$ .

- A)  $21\frac{\sqrt{2}}{4}$                       B)  $21\frac{\sqrt{2}}{2}$                       C) 9  
D) 10                      E)  $11\sqrt{2}$



**PROBLEMA N° 272**

En el triángulo acutángulo ABC, se trazan las alturas AP y CM, luego se trazan los paralelogramos APFB y CMEB, la recta que une los centros de dichos paralelogramo corta a ME y PF en R y S. Si  $AC = \ell$  y  $m\angle ABC = \alpha$ . Calcule RS.

- A)  $\ell \cos \alpha$                       B)  $3\ell \cos \alpha$   
C)  $3\ell \sin \alpha$                       D)  $\frac{3}{2}\ell \cos \alpha$   
E)  $\frac{3}{2}\ell \sin \alpha$

**PROBLEMA N° 273**

En el triángulo ABC, se trazan las bisectrices interiores  $\overline{BD}$ ,  $\overline{DE}$  y  $\overline{DF}$  de los triángulos ABC, ADB y BDC respectivamente. Si  $FC = \frac{1}{5}BC$ ,  $BF = 12$  y  $AE = 5$ . Calcule AB.

- A) 6                                  B) 11  
C) 15                                D) 18  
E) 20

**PROBLEMA N° 274**

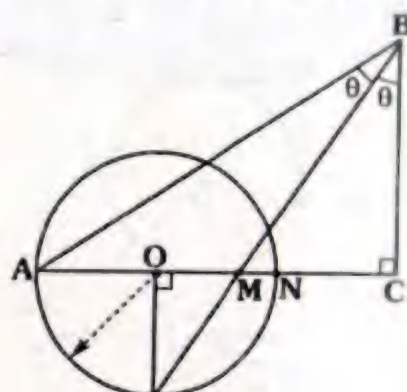
En un triángulo ABC recto en B, las bisectrices interiores  $\overline{AP}$  y  $\overline{CQ}$  se intersectan en I. Si  $(BP)(BQ) = 8$ , calcule BI.

- A) 2                                  B) 8  
C)  $\sqrt{2}$                                 D)  $2\sqrt{2}$   
E) 4

**PROBLEMA N° 275**

En el gráfico,  $MN = 1$  y  $OM = 2$ , calcule AB.

- A) 5  
B) 6  
C) 7,5  
D) 9  
E) 12



**PROBLEMA N° 276**

En el cuadrado ABCD, P y Q son puntos en los lados AB y AD respectivamente; de modo que  $\overline{BQ} \cap \overline{PC} = \{E\}$ ,  $m\angle PCQ = 45^\circ$ ,  $PQ = 4(BP)$  y  $BE = 4$ . Calcule BQ.

- A) 12                                  B) 16                                  C) 20  
D)  $8\sqrt{2}$                               E) 32

**PROBLEMA N° 277**

En un triángulo acutángulo ABC de ortocentro O, y alturas AT y BM, la paralela trazada por T a  $\overline{BM}$  intercepta a la prolongación de  $\overline{AB}$  en P. Calcule la distancia de T a  $\overline{BM}$ , si  $AC = 12$ ,  $OM = 3$  y  $PT = 8$ .

- A) 1                                  B) 2                                  C) 3  
D) 4                                  E)  $2\sqrt{2}$

**PROBLEMA N° 278**

En un triángulo ABC de circuncentro "O" la mediatriz de  $\overline{AC}$  interseca a  $\overline{BC}$ , a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC y a la prolongación de  $\overline{AB}$  en los puntos M, N y T respectivamente. Calcule el

circunradio del triángulo ABC, si  $OM=8$  y  $MT=10$ .

- A) 8                      B) 9                      C) 12  
D) 15                    E) 18

**PROBLEMA N° 279**

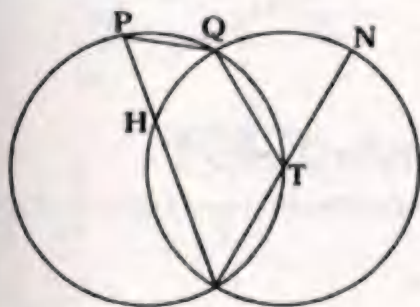
Se tiene una semicircunferencia de diámetro  $\overline{AB}$ , luego se traza una circunferencia tangente al arco  $\overline{AB}$  en "T" y a la prolongación de  $\overline{AB}$  en "P", si:  $AT=12$  y  $AB=13$ , calcule BP.

- A)  $\frac{65}{7}$                       B)  $\frac{67}{4}$                       C) 6  
D)  $\frac{13}{3}$                     E)  $\frac{63}{8}$

**PROBLEMA N° 280**

Calcule QT, si  $PQ=3$  y  $NT=2(HP)$ .

- A) 6  
B) 3  
C) 4  
D) 5  
E) 4,5



**PROBLEMA N° 281**

Se tiene un triángulo equilátero ABC de baricentro "G"; en la región exterior relativa a  $\overline{AB}$  se ubica el punto "P" tal que la recta  $\overline{PG}$  interseca a  $\overline{BC}$  en "Q". Si  $3(BQ)=5(QC)$ ,  $m\angle APG=30^\circ$  y  $PG=7\sqrt{3}$ , calcule AP.

- A) 6                      B) 10                      C) 12  
D) 14                    E) 21

**PROBLEMA N° 282**

Se tiene un triángulo ABC de baricentro "G" y un paralelogramo AGDC; "M" es punto medio de  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AD}$  y  $\overline{MD}$  intersecan a  $\overline{BC}$  en E y F respectivamente. Calcule

$$\frac{AE}{ED} - \frac{MF}{FD}$$

- A)  $\frac{3}{4}$                       B)  $\frac{2}{3}$                       C)  $\frac{3}{2}$   
D)  $\frac{3}{5}$                     E)  $\frac{2}{5}$

**PROBLEMA N° 283**

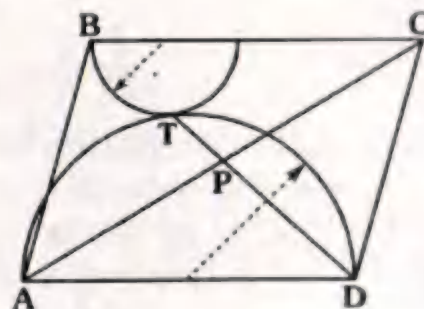
En un triángulo ABC, recto en A, se traza la ceviana interior AP, en cuya prolongación se ubica el punto D tal que  $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ . Si  $AB=BP=3$  y  $PC=4$ , calcule  $(AP)(PD)$

- A) 8                      B) 10                      C) 24  
D) 12                    E) 16

**PROBLEMA N° 284**

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo, la razón de los radios de la semicircunferencia es  $\frac{3}{7}$ . Calcule  $TP/PD$ . ("T" es punto de tangencia)

- A)  $\frac{1}{7}$   
B)  $\frac{2}{5}$   
C)  $\frac{2}{7}$   
D)  $\frac{1}{6}$   
E)  $\frac{3}{8}$



**PROBLEMA N° 285**

Si P, Q y T son puntos de tangencia;  $AM=1$  y  $BH=3$ ; calcule TN.



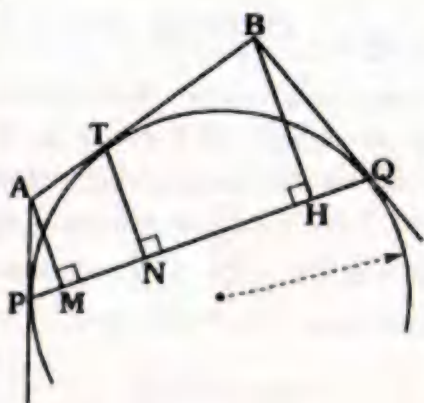
A) 1,5

B) 1,8

C) 1,6

D) 2,2

E) 1,2



**PROBLEMA N° 286**

En el gráfico, ABCD es un paralelogramo y  $CD=3(PB)$ . Calcule  $BQ/QO$ .

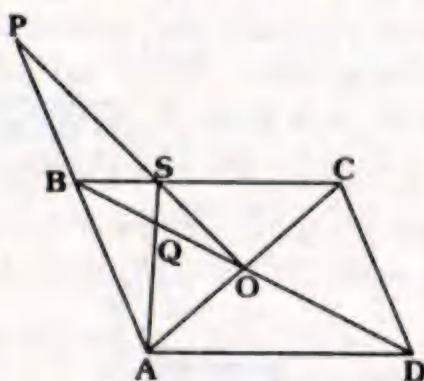
A) 1/2

B) 1/3

C) 1/4

D) 1/5

E) 1/6



**PROBLEMA N° 287**

En el gráfico, ABCD es un rombo,  $AC=10$ ,  $BD=2$  y  $AB=PC=CQ$ . Calcule la distancia entre los baricentros de los triángulos BCP y DCQ.

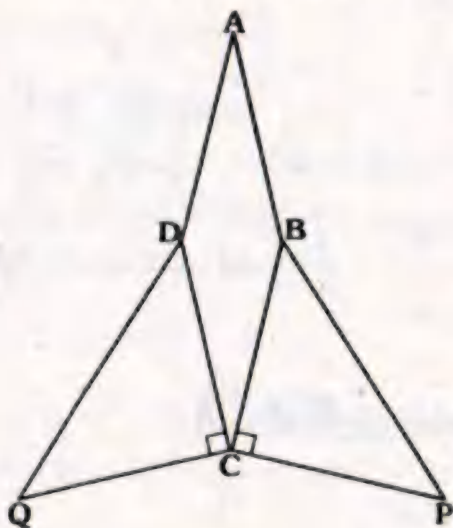
A) 3

B) 4

C) 5

D) 6

E) 8



**PROBLEMA N° 288**

Se tiene el cuadrante AOB de centro  $O_1$  en  $\widehat{AB}$  y en la prolongación de  $\overline{OB}$  se ubican los puntos P y Q respectivamente; tal que la circunferencia de centro  $O_1$  que contiene a P, B y Q interseca a  $\overleftrightarrow{AP}$  en L. Si  $OO_1=a$ , calcule AL.

A) a

B) 2a

C)  $a\sqrt{2}$

D)  $a\sqrt{3}$

E)  $a\sqrt{5}$

**PROBLEMA N° 289**

G es baricentro del triángulo THM, T es punto de tangencia. Calcule  $AB/BC$ .

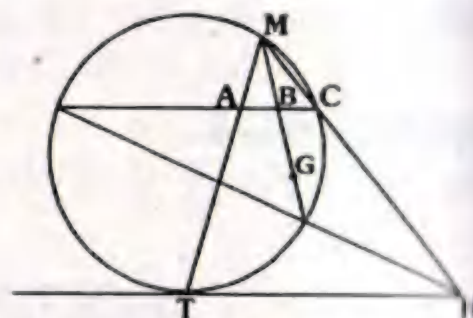
A) 1

B) 1/3

C) 2/3

D) 2

E) 1/2



**PROBLEMA N° 290**

Si  $AH=m$  y  $MH=n$ . Calcule  $AE/EB$ .

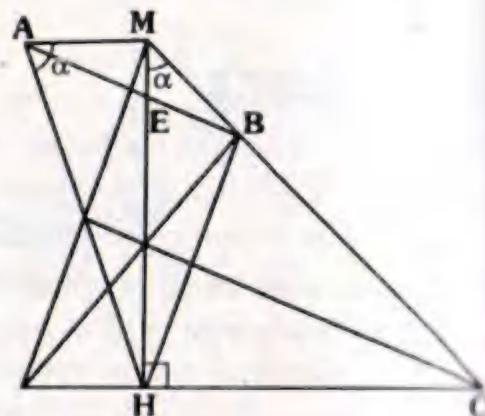
A)  $\frac{m}{n}$

B)  $\frac{m^2}{n}$

C)  $\frac{m}{n^2}$

D)  $\frac{m^2}{n^2}$

E)  $\frac{n^2}{m^2}$



**PROBLEMA N° 291**

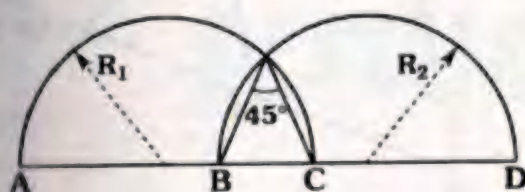
Se tiene el triángulo ABC de altura BH. Si  $m\angle ABC = 135^\circ$ ,  $AH = 3 - \sqrt{2}$  y  $HC = 3 + \sqrt{2}$ . Calcule BH.

- A) 2                      B)  $\sqrt{2}$                       C)  $\sqrt{3}$   
D) 1                      E) 3

**PROBLEMA N° 292**

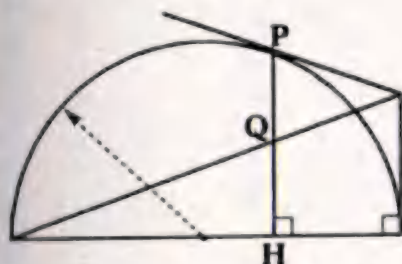
En el gráfico, si  $3(AB) = 2(CD)$ . Calcule  $\frac{R_1}{R_2}$

- A) 1/3  
B) 1/2  
C) 2/3  
D) 3/5  
E) 3/4



**PROBLEMA N° 293**

En el gráfico, P es punto de tangencia, halle PQ/QH.



- A) 1                      B)  $\sqrt{2}$                       C)  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$   
D)  $\frac{1}{2}$                       E)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**PROBLEMA N° 294**

En un triángulo ABC:  $BC=a$ ,  $AC=b$ ,  $AB=c$ . Se trazan las bisectrices interiores  $\overline{CD}$  y  $\overline{AE}$ ,

tal que la prolongación de  $\overline{DE}$  interseca a la prolongación de  $\overline{AC}$  en F. Calcule CF.

- A)  $\frac{b \cdot c}{a+b}$                       B)  $\frac{a \cdot b}{c-a}$                       C)  $\frac{a \cdot c}{a+b}$   
D)  $\frac{a \cdot c}{a+b+c}$                       E)  $\frac{b \cdot c}{a+b-c}$

**PROBLEMA N° 295**

En un triángulo ABC se traza la ceviana interior  $\overline{BE}$ , tal que  $m\angle BAC = 2m\angle EBC$ . Calcular BC, si  $AB=5\mu$ ,  $AE=3\mu$  y  $EC=4\mu$ .

- A)  $3\mu$                       B)  $2\sqrt{3}\mu$                       C)  $3\sqrt{2}\mu$   
D)  $2\sqrt{6}\mu$                       E)  $4\sqrt{3}\mu$

**PROBLEMA N° 296**

En un triángulo isósceles ABC ( $AB=BC$ ) se traza la ceviana BD, cuya prolongación interseca a la bisectriz exterior de vértice C en E. Calcule CE, si  $m\angle ABD = 3m\angle DBC$ ,  $AD=7\mu$  y  $DC=3\mu$ .

- A)  $2\sqrt{3}\mu$                       B)  $4\sqrt{3}\mu$   
C)  $3\sqrt{2}\mu$                       D)  $\sqrt{15}\mu$   
E)  $\sqrt{21}\mu$

**PROBLEMA N° 297**

En un trapecio ABCD ( $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ), M es un punto de  $\overline{CD}$ , tal que  $3(CM) = 2(MD)$  y  $m\angle BAM = m\angle CDA$ .

Si  $BC=6\mu$  y  $AD=15\mu$ , calcule AM.

- A)  $9,6\mu$                       B)  $10,8\mu$                       C)  $11,2\mu$   
D)  $12,0\mu$                       E)  $12,4\mu$



**PROBLEMA N° 298**

Dado un triángulo rectángulo ABC recto en B se traza la ceviana  $\overline{AP}$  en la cual se ubica el punto D tal que  $\overline{BD} \perp \overline{AP}$ . En  $\overline{AC}$  se ubica el punto E tal que ABDE es un trapecio isósceles. Si  $AD=9\mu$  y  $DP=4\mu$ , calcule EC.

- A)  $6\mu$                                       B)  $9\mu$   
C)  $13,5\mu$                                   D)  $15\mu$   
E)  $12\mu$

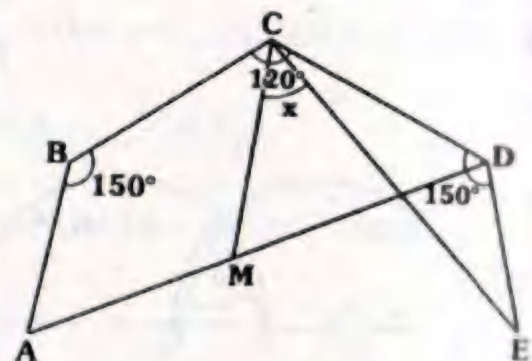
**PROBLEMA N° 299**

Desde el punto P, exterior a una semicircunferencia de diámetro AB se traza la tangente PT, tal que  $\overline{PB}$  es bisectriz del ángulo APT. Si  $PT=12\mu$  y  $PA=10\mu$ , calcule PB.

- A)  $\frac{72\sqrt{5}}{5}\mu$                       B)  $\frac{72\sqrt{2}}{7}\mu$                       C)  $\frac{72\sqrt{7}}{7}\mu$   
D)  $\frac{36\sqrt{7}}{5}\mu$                       E)  $\frac{36\sqrt{5}}{5}\mu$

**PROBLEMA N° 300**

En el gráfico,  $AB=DE$ ,  $BC=CD$  y  $AM=MI$ . Calcule x.



- A)  $30^\circ$                       B)  $45^\circ$                       C)  $60^\circ$   
D)  $37^\circ$                       E)  $53^\circ$



# **Geometría**

## **SOLUCIONARIO**

ANUAL

CEPRE UNI

SEMESTRAL

SEMESTRAL INTENSIVO

REPASO

**PROPORCIONALIDAD  
Y SEMEJANZA**





Piden  $x$ .

- Como  $AP=9$  y  $PC=3$ , notamos que  $AP=3(PC)$  y al ser  $\overline{AB} \parallel \overline{FC}$

$$\Rightarrow BP=3(PF)$$

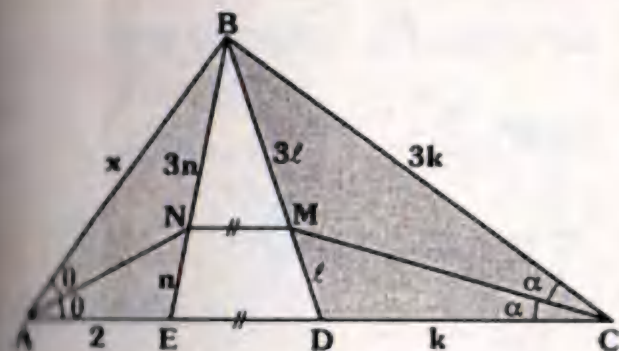
- Observemos también:  $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$

$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{a}{3a}$$

$$\therefore x = 1$$

**Clave B**

### RESOLUCIÓN N° 4



Piden  $x$ .

- En  $\triangle DBC$ , por teorema de la bisectriz:

$$BM = 3\ell \text{ y } MD = \ell$$

- Como  $\overline{NM} \parallel \overline{ED} \Rightarrow$  Por teorema de Tales:  $BN=3n$  y  $NE=n$

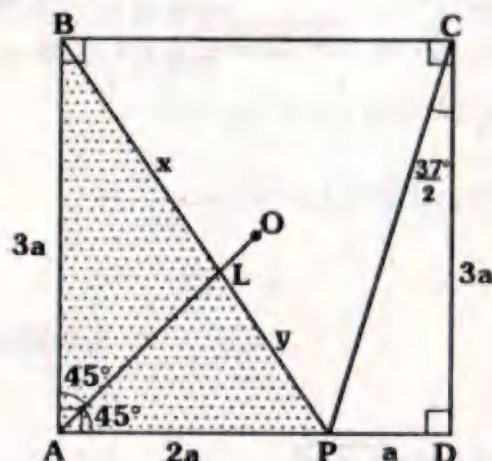
- Finalmente, por teorema de la bisectriz en  $\triangle ABE$ :

$$\frac{x}{2} = \frac{3\ell}{\ell}$$

$$\therefore x = 6$$

**Clave B**

### RESOLUCIÓN N° 5



Nos piden  $\frac{x}{y}$ .

- Como O es centro

$$\Rightarrow m\angle PAL = m\angle LAB = 45^\circ$$

- $\triangle PDC$ : notable de  $\frac{37^\circ}{2}$

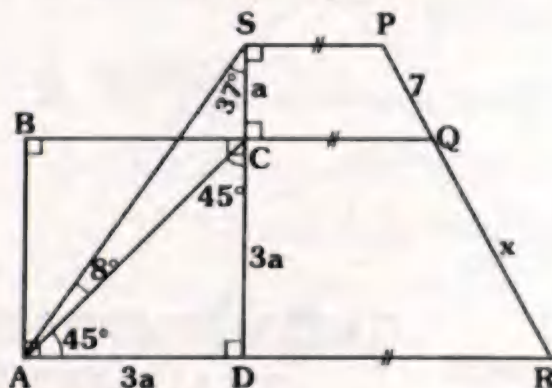
$$\Rightarrow PD=a \text{ y } CD=3a$$

- $\triangle BAP$ , notamos que  $AB=3a$  y  $AP=2a$ , por teorema de la bisectriz:

$$\frac{x}{y} = \frac{3a}{2a} = \frac{3}{2}$$

**Clave B**

### RESOLUCIÓN N° 6



Nos piden  $x$ .



- Al completar "ángulos", notamos que:

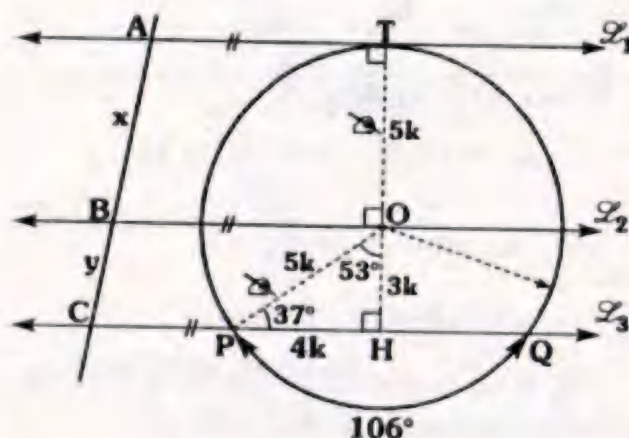
$\triangle ADC$  es notable de  $45^\circ$  y  $\triangle ADS$  es notable de  $37^\circ$ , sea  $AD=DC=3a$ .

$$\Rightarrow SD=4a \quad \Rightarrow \quad SC=a$$

- Como  $\overline{SP} // \overline{CQ} // \overline{DR} \Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{3a}{a}$

$$\therefore x = 21$$

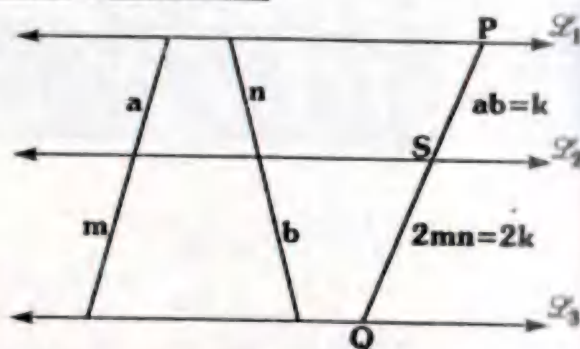
**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 7**

Piden:  $\frac{x}{y}$ .

- Por propiedad:  $\overline{OT} \perp \vec{\mathcal{Z}}_1$   
 $\Rightarrow$  al prolongar  $\overline{TO}$  hasta H, tendremos:  $\overline{OH} \perp \vec{\mathcal{Z}}_3$
- $\angle PHO$ : notable de  $37^\circ$   
 $\Rightarrow$  Si  $OH=3k \Rightarrow OP=OT=5k$
- Por teorema de Tales:

$$\frac{x}{v} = \frac{5k}{3k} = \frac{5}{3}$$

**Clave E****RESOLUCIÓN N° 8**


Piden  $\frac{a}{m} + \frac{n}{b}$ .

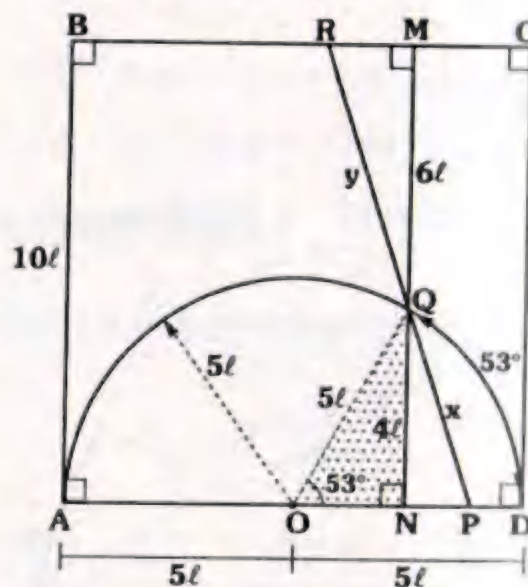
- Como  $\overline{\mathcal{L}}_1 // \overline{\mathcal{L}}_2 // \overline{\mathcal{L}}_3$ , por teorema de Tales:

$$\frac{a}{m} = \frac{n}{b} \Rightarrow ab = mn$$

- En la línea  $\overline{PQ}$ :  $QS=2k$  y  $SP=k$

- Luego:  $\frac{a}{m} = \frac{1}{2}$  y  $\frac{n}{b} = \frac{1}{2}$   
 $\Rightarrow \frac{a}{m} + \frac{n}{b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

**Clave** 

**RESOLUCIÓN N° 9**

Nos piden  $x/y$

• Desde Q trazamos una recta paralela a CD.

•  $\triangle ONQ$ : notable de  $53^\circ$

$$\Rightarrow OQ = 5l \text{ y } NQ = 4l$$

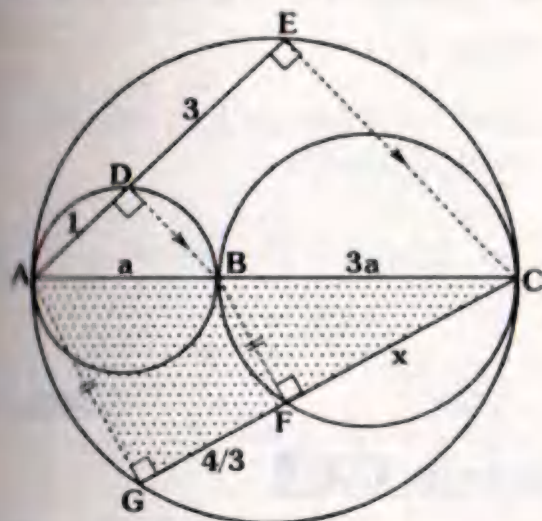
$$\Rightarrow AD = AB = 10l \Rightarrow QM = 6l$$

• Como  $\overline{RM} \parallel \overline{NP} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{4l}{6l}$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{2}{3}$$

**Clave C**

### RESOLUCIÓN N° 10



Nos piden x:

• Como  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{AC}$  son diámetros  $\Rightarrow m\angle ADB = m\angle AEC = m\angle AGC = m\angle BFC = 90^\circ$

• Luego  $\overline{DB} \parallel \overline{EC}$  y  $\overline{AG} \parallel \overline{BF}$

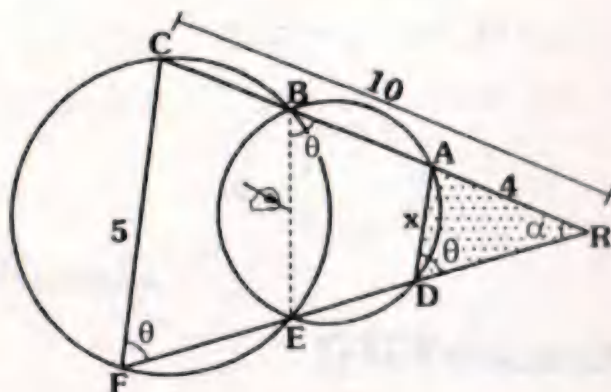
• Por teorema de Tales:  $\frac{BC}{AB} = \frac{3}{1}$

• Como  $\frac{BC}{AB} = \frac{x}{\left(\frac{4}{3}\right)} \Rightarrow 3 = \frac{x}{\left(\frac{4}{3}\right)}$

$$\therefore x = 4$$

**Clave E**

### RESOLUCIÓN N° 11



Nos piden x:

• Aprovechemos la presencia de circunferencias, trazando la cuerda común.

• Luego:  $m\angle CFR = m\angle EBR = m\angle ADR$

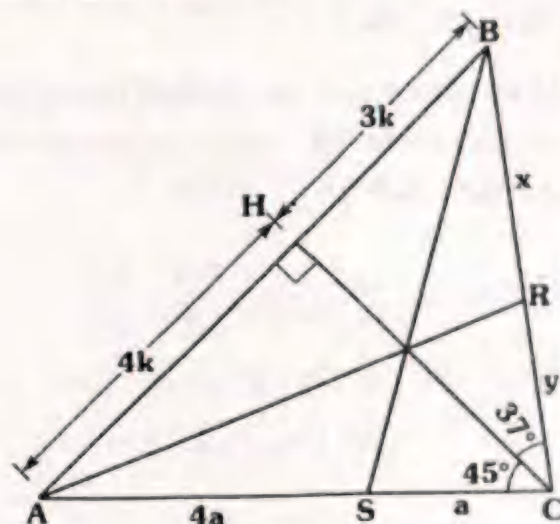
$$\Rightarrow \overline{FC} \parallel \overline{DA}$$

•  $\triangle FCR \sim \triangle DAR \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{5}{10}$

$$\therefore x = 2$$

**Clave C**

### RESOLUCIÓN N° 12



Nos piden:  $x/y$

• Como hay cevianas concurrentes, la idea es usar el teorema de Ceva.



- $\angle BHC$  notable de  $37^\circ$  y  $\angle AHC$  notable de  $45^\circ$

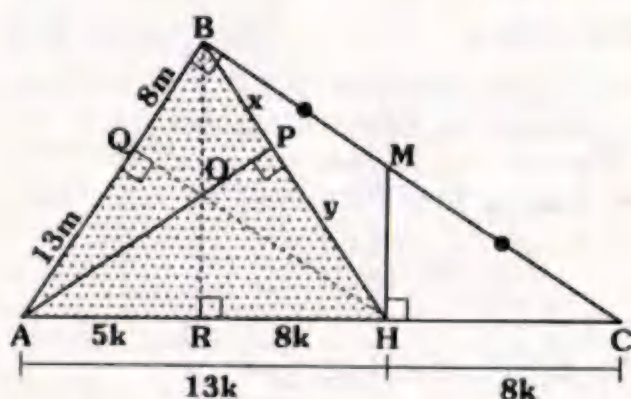
Sea  $HC=4k \Rightarrow HB=3k$  y  $AH=4k$

- Por Teorema de Ceva:  $x \cdot a \cdot 4k = y \cdot 4a \cdot 3k$

$$\therefore \frac{x}{y} = 3$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 13**



Nos piden:  $\frac{x}{y}$

- Como  $BM=MC \Rightarrow$  al trazar  $\overline{BR} \perp \overline{AC} \Rightarrow RH=HC=8k$

- O es ortocentro del  $\triangle ABH \Rightarrow$  la prolongación de  $\overline{HO}$  corta perpendicularmente a  $\overline{AB}$  en Q.

- Como  $\overline{QH} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{13}{8}$

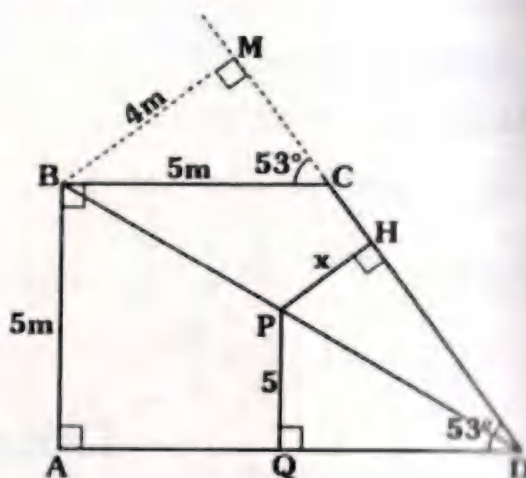
- En  $\triangle ABH$ , por teorema de Ceva:

$$x \cdot 8k \cdot 13m = y \cdot 5k \cdot 8m$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{5}{13}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 14**



Piden: x

- Se prolonga  $\overline{DC}$  y se traza  $\overline{BM} \perp \overline{DC}$  (M en  $\overline{DC}$ )

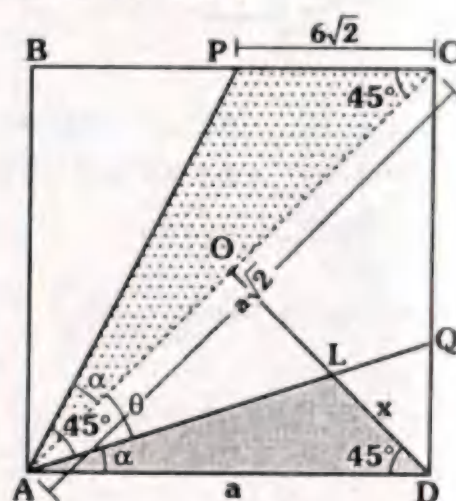
- $\triangle BMC$  notable de  $53^\circ$ , sea  $BM=4m \Rightarrow BC=AB=5m$

- Como  $\overline{PQ} \parallel \overline{BA}$  y  $\overline{PH} \parallel \overline{BM} \Rightarrow \frac{x}{4m} = \frac{5}{5m}$

$$\therefore x = 4$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 15**



Piden x.

- Notemos que  $\alpha + \theta = 45^\circ$

- Al trazar la diagonal  $\overline{AC}$ , notamos que  $m\angle PAC = m\angle LAD = \alpha$

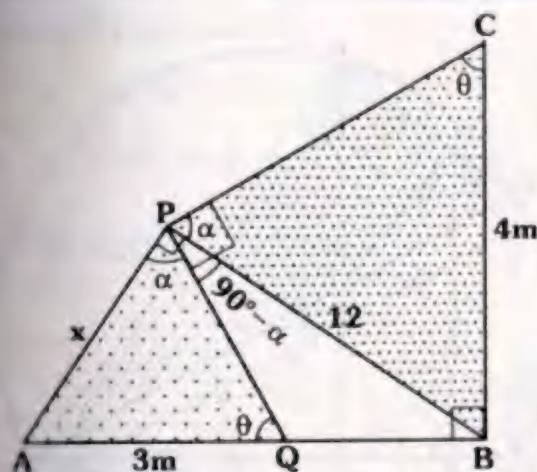
- Luego  $\triangle APC \sim \triangle ALD$

$$\Rightarrow \frac{x}{6\sqrt{2}} = \frac{a}{a\sqrt{2}}$$

$$\therefore x = 6$$

**Clave A**

### RESOLUCIÓN N° 16



Piden x.

- Notemos:  $m\angle QPB = 90^\circ - \alpha$

$$\Rightarrow m\angle QPC = 90^\circ$$

- $\triangle QPCB$  es inscriptible

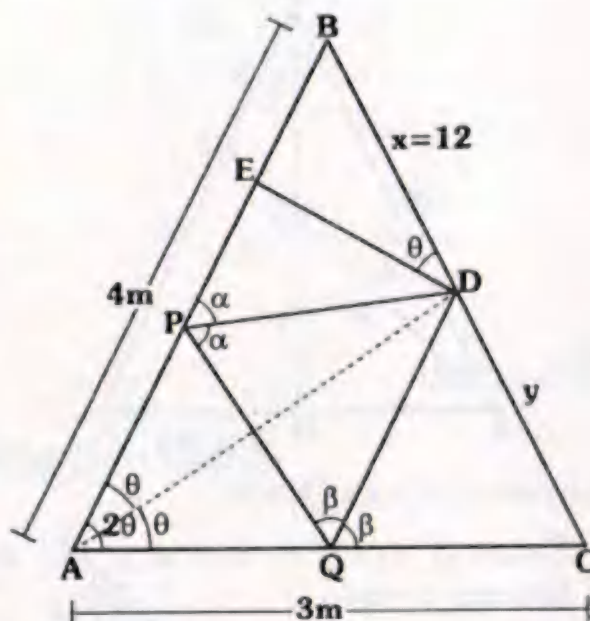
$$\Rightarrow m\angle AQP = m\angle PCB = \theta$$

- $\triangle PQA \sim \triangle PCB \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{3m}{4m}$

$$\therefore x = 9$$

**Clave D**

### RESOLUCIÓN N° 17



Nos piden BC.

Dato:  $(AB)(EB) = 144$

- Sea  $BD = x$  y  $DC = y \Rightarrow BC = x + y$

- Como D es excentro del  $\triangle APQ \Rightarrow \overrightarrow{AD}$  es bisectriz del ángulo BAC.

- En el  $\triangle ADB$ :

$$x^2 = \frac{(BE)(AB)}{144} \Rightarrow x = 12$$

- En el  $\triangle ABC$ , por teorema de la bisectriz:

$$\frac{x}{y} = \frac{4m}{3m} \Rightarrow y = 9$$

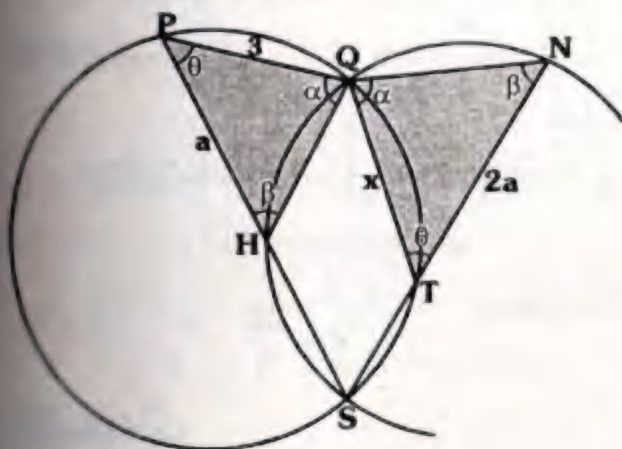
$$\therefore BC = x + y = 21$$

**Clave C**





**RESOLUCIÓN N° 21**



Nos piden x.

- Notemos que:  $\triangle SHQN$  y  $\triangle PQTS$  son cuadriláteros inscritos.

$$\Rightarrow m\angle QPS = m\angle QTN \text{ y}$$

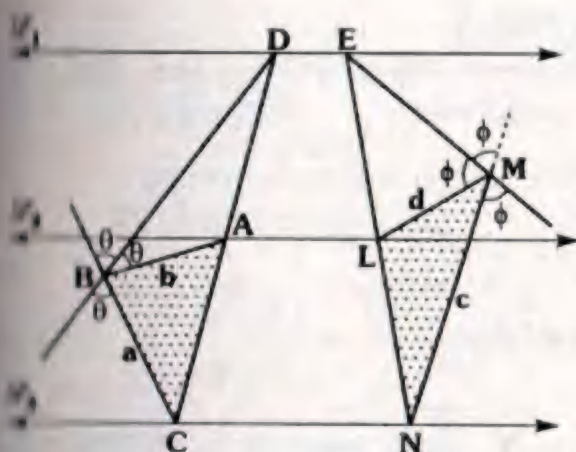
$$m\angle QNS = m\angle QHP$$

$$\triangle PQH \sim \triangle TQN \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{2a}{a}$$

$$\therefore x = 6$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 22**



Nos piden la relación entre a, b, c y d.

- Notemos que  $\overline{BD}$  y  $\overline{ME}$  son bisectrices exteriores de los triángulos CBA y NML.

respectivamente, entonces:

$$\frac{a}{b} = \frac{CD}{DA} \text{ y } \frac{c}{d} = \frac{NE}{EL}$$

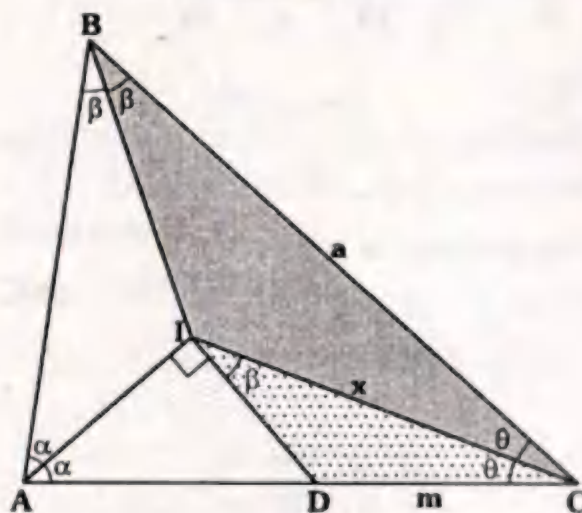
- Como  $\overline{L_1} \parallel \overline{L_2} \parallel \overline{L_3}$

$$\Rightarrow \frac{CD}{DA} = \frac{NE}{EL} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore ad = bc$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 23**



Nos piden x.

Dato:  $am = 64$

- Como I es incentro

$$\Rightarrow m\angle ABI = m\angle IBC = \beta \text{ y}$$

$$m\angle AIC = 90^\circ + \beta \Rightarrow m\angle DIC = \beta$$

$$\text{También } m\angle ACI = m\angle ICB = \theta$$

- Luego  $\triangle ICS \sim \triangle BCI$

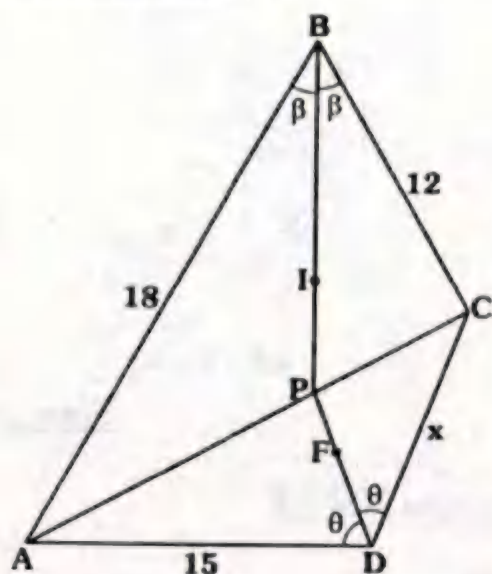
$$\Rightarrow \frac{x}{m} = \frac{a}{x} \Rightarrow x^2 = am$$

$$\therefore x = 8$$

**Clave C**



**RESOLUCIÓN N° 24**



Piden x.

- Notemos que  $\overline{BP}$  y  $\overline{DP}$  son bisectrices interiores de los  $\Delta$ s ABC y ADC
- Por teorema de la bisectriz:

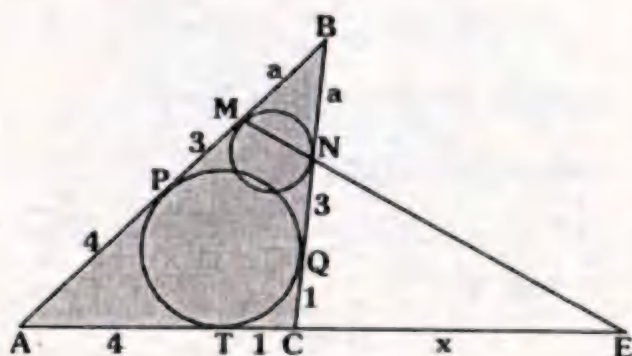
$$\frac{18}{12} = \frac{AP}{PC} \quad \text{y} \quad \frac{15}{x} = \frac{AP}{PC}$$

$$\Rightarrow \frac{18}{12} = \frac{15}{x}$$

$$\therefore x = 10$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 25**



Nos piden x.

- Por propiedad de circunferencia:  
 $AP=AT=3$ ;  $TC=CQ$  y  $NQ=PM=3$
- Por teorema de Menelao para el  $\Delta ABC$  (recta secante:  $\overleftrightarrow{MNE}$ ):

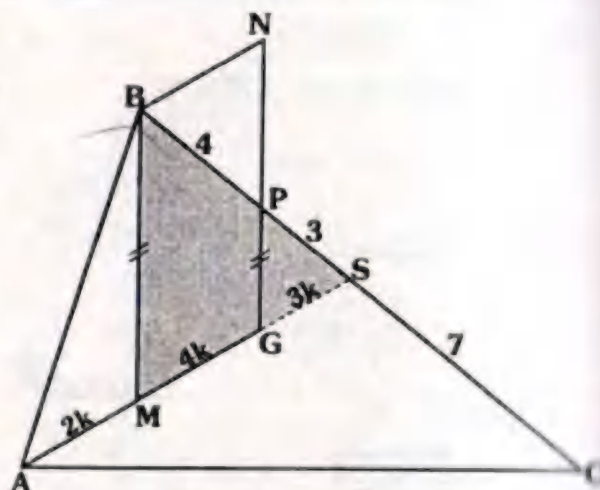
$$(AM)(BN)(CE) = (MB)(NC)(EA)$$

$$\Rightarrow 7 \cdot a \cdot x = a \cdot 4(5+x)$$

$$\therefore x = \frac{20}{3}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 26**



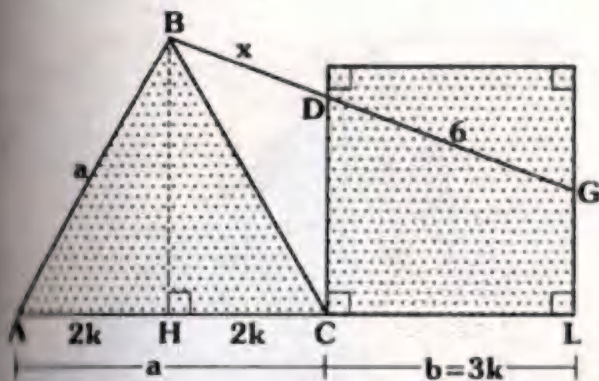
Nos piden PC.

- Como  $MG=2(AM)$ , sea  $AM=2k$   
 $\Rightarrow MG=4k$
- Debido a que G es baricentro  
 $\Rightarrow GS=3k$  y  $BS=SC$
- Como  $\overline{MB} \parallel \overline{GP} \Rightarrow \frac{PS}{4} = \frac{3k}{4k} \Rightarrow PS=3$
- Como  $\overline{AS}$  es mediana  $\Rightarrow BS=SC=7$

$$\therefore PC = 10$$

**Clave II**

**RESOLUCIÓN N° 27**



Piden x.

- Como las regiones sombreadas son regulares e isoperimétricas:

$$3a = 4b \Rightarrow b = 3k \text{ y } a = 4k$$

- Al trazar la altura BH del  $\triangle ABC$

$$\Rightarrow AH = HC = 2k$$

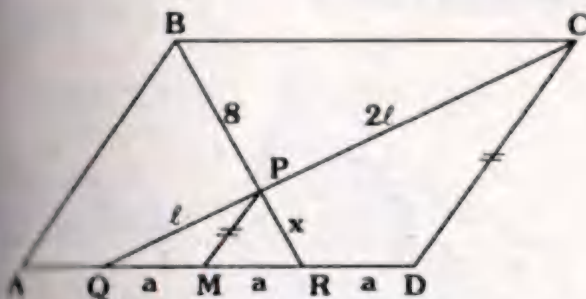
- Como:  $\overline{BH} \parallel \overline{DC} \parallel \overline{GL}$  (T. Tales):

$$\Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{2k}{3k}$$

$$\therefore x = 4$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 28**



Piden x.

- Como  $\overline{MP} \parallel \overline{DC} \Rightarrow CP = 2(PQ)$

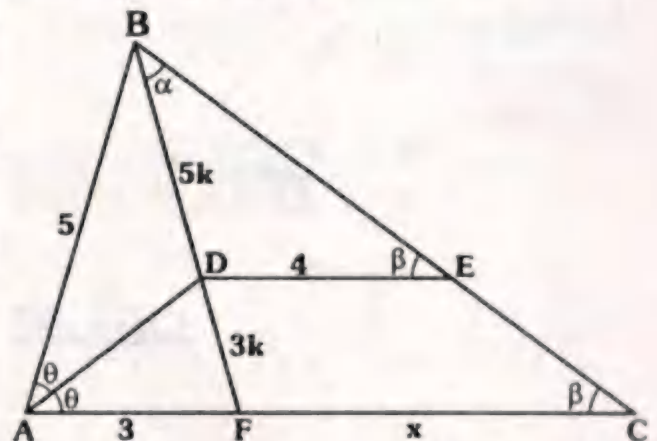
- Por corolario del teorema de Tales:

$$\Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{l}{2l}$$

$$\therefore x = 4$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 29**



Piden x.

- En el  $\triangle FBA$ , por teorema de la bisectriz:

$$BD = 5k \text{ y } DF = 3k$$

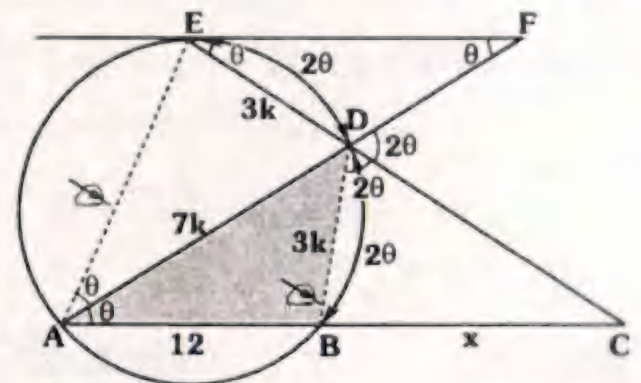
- $\triangle FBC \sim \triangle DBE$

$$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{8k}{5k}$$

$$\therefore x = 6,4$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 30**





Piden x.

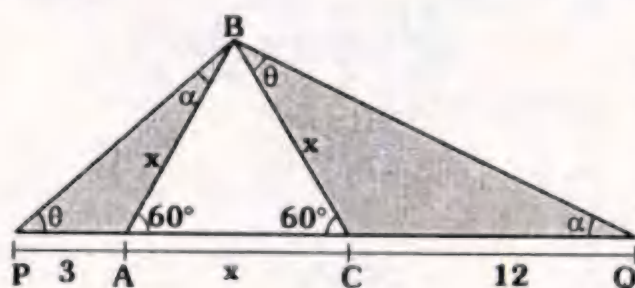
- Como  $m\widehat{ED} = m\widehat{DB}$   
 $\Rightarrow m\angle EAD = m\angle DAB = \theta$   
 $\Rightarrow m\angle DEF = m\angle DFE = \theta$
- Notemos que  $ED = DB$  y que para el  $\triangle ADB$  la línea  $\overline{DC}$  es bisectriz exterior, entonces:

$$\frac{3k}{7k} = \frac{x}{x+12}$$

$$\therefore x = 9$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 31**



Piden x.

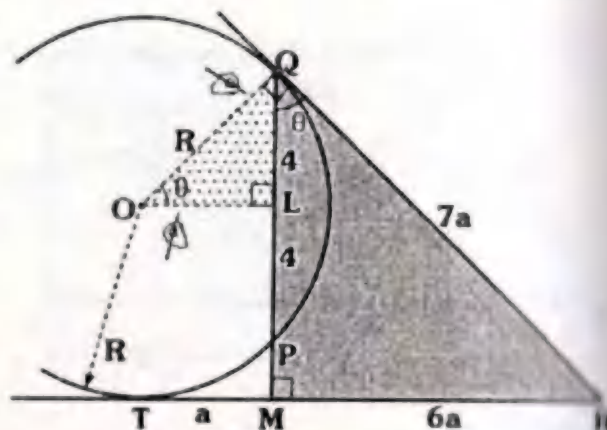
- Sea  $m\angle PBA = \alpha \Rightarrow \alpha + \theta = 60^\circ$ , luego  $m\angle CQB = \alpha$
- Luego  $\triangle PBA \sim \triangle BCQ$

$$\Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{3}{x}$$

$$\therefore x = 6$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 32**



Nos piden R.

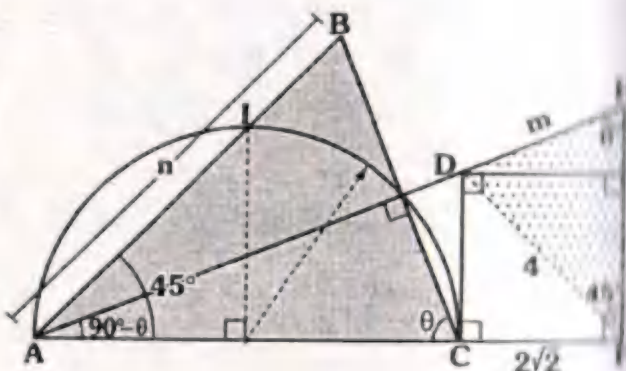
- Se traza  $\overline{OL} \perp \overline{QP}$  (L en  $\overline{QP}$ )  
 $\Rightarrow QL = LP = 4$
- Sea  $TM = a$  por dato:  $QR = 7a$ , como  $RQ = RT = 7a \Rightarrow MR = 6a$
- Notemos:  $\triangle OLQ \sim \triangle QMR$

$$\Rightarrow \frac{R}{4} = \frac{7a}{6a}$$

$$\therefore R = \frac{14}{3}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 33**



Nos piden BC.

Datos:  $mn=40$  y  $CF=2\sqrt{2}$

• Como CDEF es un cuadrado  $\Rightarrow DF=4$

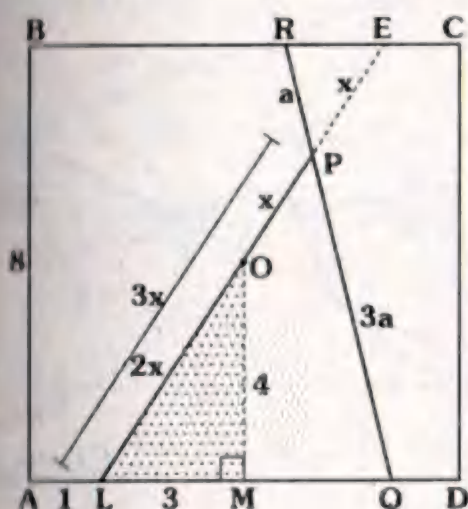
• Notemos que:  $\triangle ACB \sim \triangle FHD$

$$\Rightarrow \frac{BC}{m} = \frac{n}{4} \Rightarrow BC = \frac{mn}{4}$$

$$\therefore BC = 10$$

Clave **B**

### RESOLUCIÓN N° 34



Nos piden x.

• Prolongemos  $\overline{LP}$  hasta que corte a  $\overline{RC}$  en E.

• Como  $PQ=3(RP)$ , por teorema de Tales:

$$LP=3(PE), \text{ sea } PE=x$$

$$\Rightarrow LP=3x, \text{ como } LO=OE=2x$$

• Se traza  $\overline{OM} \perp \overline{AD}$

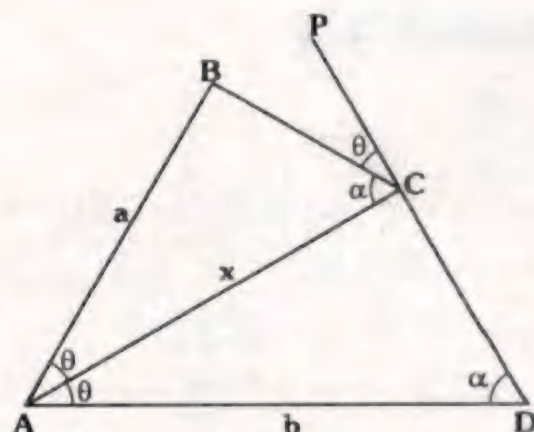
$$\Rightarrow AM=MD=OM=4$$

• En  $\triangle LMO$ :  $2x=5$

$$\therefore x = 2,5$$

Clave **D**

### RESOLUCIÓN N° 35



Piden x.

• Sea  $m\angle ADC = \alpha \Rightarrow$  por ángulo exterior:

$$m\angle ACP = \alpha + \theta \Rightarrow m\angle BCA = \alpha$$

•  $\triangle ACB \sim \triangle ADC$

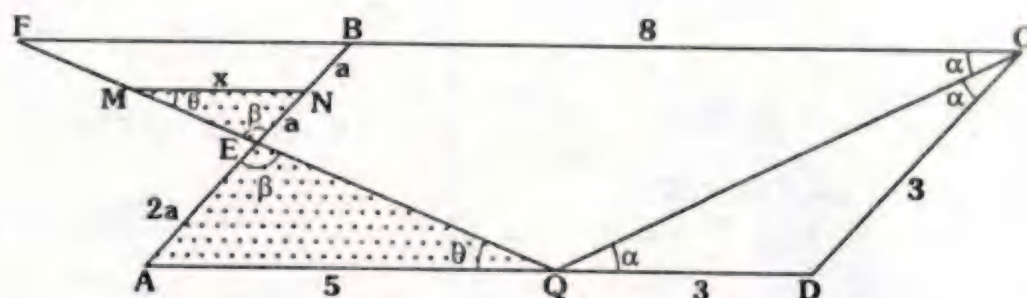
$$\Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{a}{x}$$

$$\therefore x = \sqrt{ab}$$

Clave **C**



**RESOLUCIÓN N° 36**



Nos piden  $x$ .

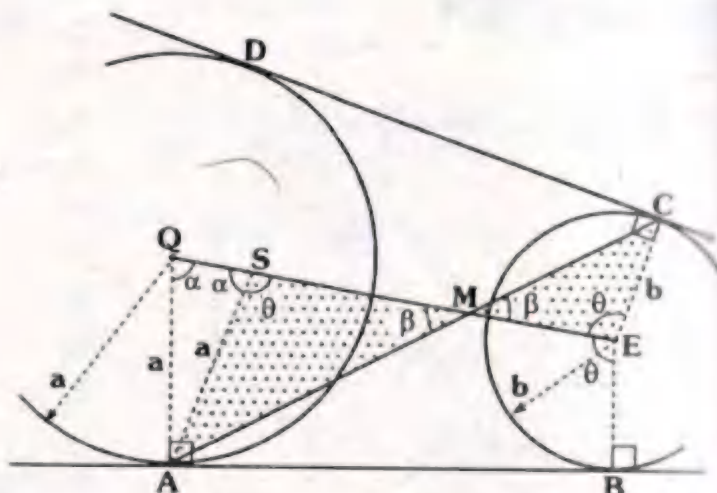
- Observamos que  $\triangle QDC$  es isósceles:  $QD=DC=3 \Rightarrow AQ=2$
- $\triangle AEQ \sim \triangle NEM \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{a}{2a} \Rightarrow x = 2,5$

**Clave** **A**

**RESOLUCIÓN N° 37**

Piden  $\frac{AM}{MC}$

- Notemos que:  $m\angle QEB = m\angle QEC = \theta$   
y  $\alpha + \theta = 180^\circ$
- Se traza  $\overline{AS}$  tal que  $\overline{AS} \parallel \overline{EC}$   
 $\Rightarrow m\angle ASE = \theta \Rightarrow \triangle AQS$ : isósceles
- $\triangle ASM \sim \triangle CEM \Rightarrow \frac{AM}{MC} = \frac{a}{b}$



**Clave** **B**

**RESOLUCIÓN N° 38**

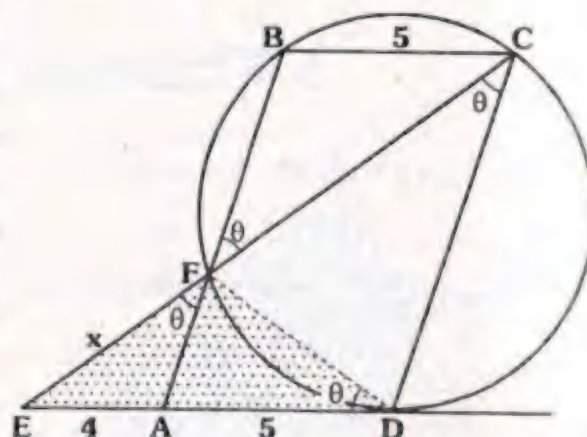
Nos piden  $x$ .

- Notemos que  $m\angle AFE = m\angle FDA$
- En el  $\triangle EFD$ , por propiedad de semejanza:

$$x^2 = (EA)(ED)$$

$$x^2 = (4)(9)$$

$$\therefore x = 6$$



**Clave** **B**





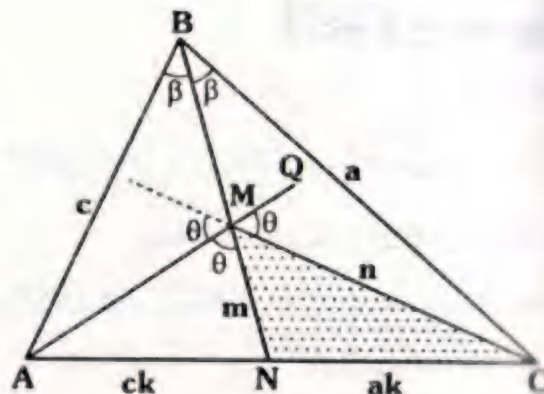
**RESOLUCIÓN N° 42**

- Nos piden la relación entre  $a$ ,  $c$ ,  $m$  y  $n$ .
- En  $\triangle ABC$ , por teorema de la bisectriz interior:

$$\frac{AN}{NC} = \frac{c}{a} \Rightarrow AN = ck \text{ y } NC = ak$$

- En  $\triangle NMC$ ,  $\overline{MA}$  es bisectriz exterior:

$$\frac{m}{n} = \frac{ck}{(c+a)k} \Rightarrow nc = m(c+a)$$



**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 43**

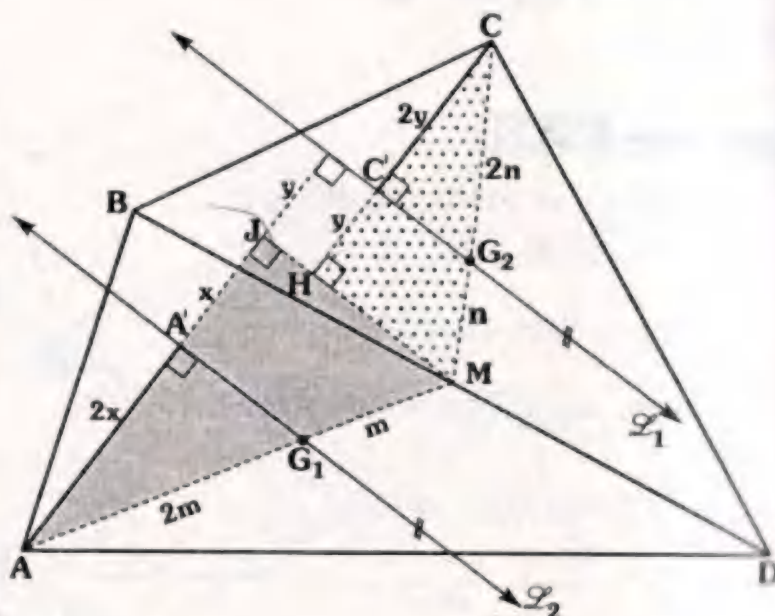
- Piden la distancia entre  $\vec{\mathcal{L}}_1$  y  $\vec{\mathcal{L}}_2$ .
- Como  $G_1$  y  $G_2$  son baricentros  $\Rightarrow$  al prolongar  $\overline{AG_1}$  y  $\overline{CG_2}$  llegarán al punto medio de  $\overline{BD}$ .
- Por teorema de Tales:

$$CC' = 2y; C'H = y;$$

$$AA' = 2x; A'J = x$$

$$\Rightarrow 2x + 2y = 9$$

$$\therefore x + y = 4,5$$



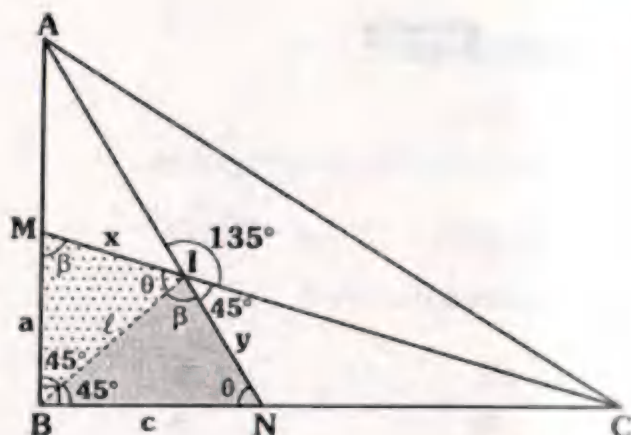
**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 44**

- Piden la relación entre  $a$ ,  $c$ ,  $x$  e  $y$ .
- Como  $I$  es incentro del  $\triangle ABC$   $\Rightarrow m\angle AIC = 135^\circ$  ( $\theta + \beta = 135^\circ$ )

$$\triangle BIM \sim \triangle BNI \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a}{\ell} = \frac{\ell}{c}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{a}{c} \therefore cx^2 = ay^2$$



**Clave D**



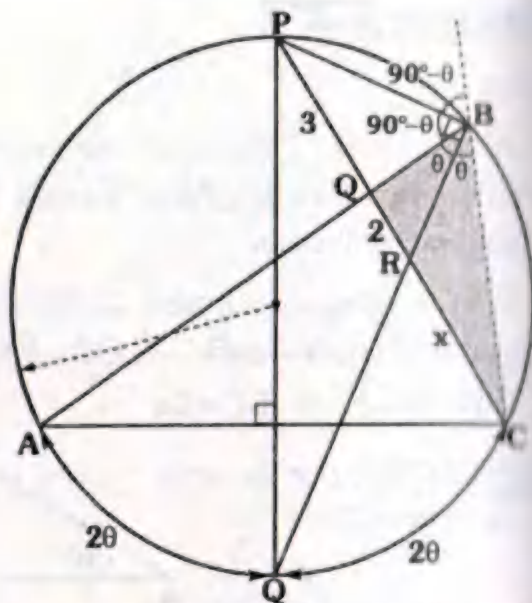


**RESOLUCIÓN N° 47**

- Nos piden  $x$ .
- Como:  $m\widehat{AQ} = m\widehat{QC} \Rightarrow m\angle ABQ = m\angle QBC$
- Luego, en  $\triangle QBC$ ,  $\overline{BR}$  es bisectriz interior y  $\overline{BP}$  es bisectriz exterior.
- C, R, Q y P forman una cuaterna armónica.

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{5+x}{3}$$

$$\therefore x = 10$$



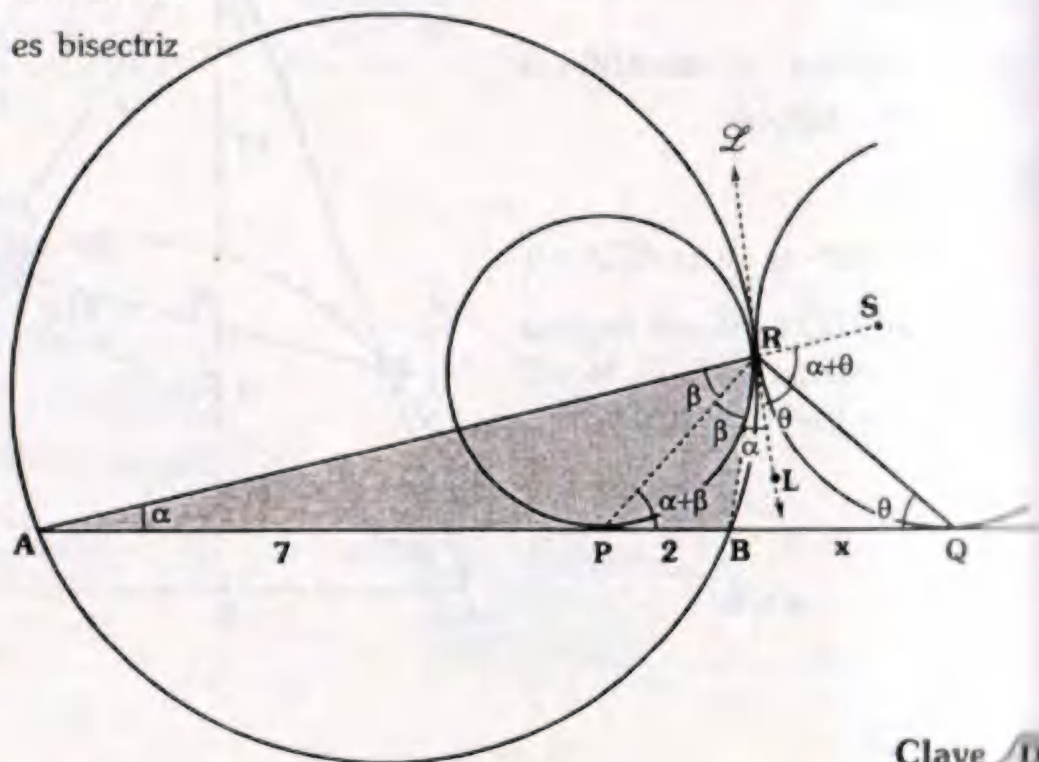
**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 48**

- Nos piden  $x$ .
- Tracemos la tangente común  $\mathcal{L}$ .
- Sea:  $m\angle RAB = \alpha \Rightarrow m\angle BRL = \alpha$ ;  $m\angle LRQ = m\angle BQR = \theta \Rightarrow m\angle QRS = \alpha + \theta$
- En  $\triangle ARB$ :  $\overline{RP}$  es bisectriz interior y  $\overline{RQ}$  es bisectriz exterior.

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{9+x}{7}$$

$$\therefore x = 3,6$$

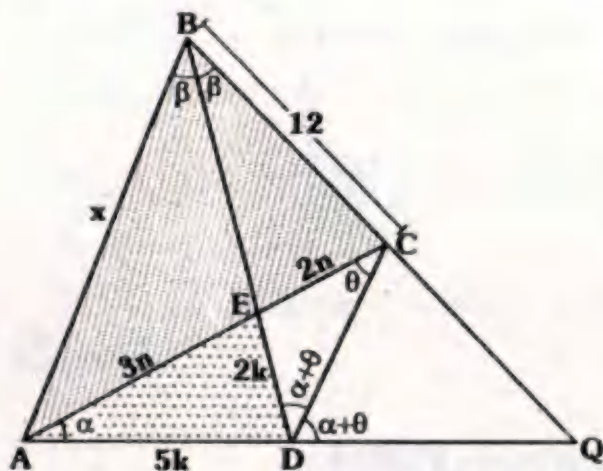


**Clave D**





**RESOLUCIÓN N° 52**



Piden  $x$ .

- En  $\triangle ADE$ ,  $\overline{DC}$  es bisectriz exterior.

$$\Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{AC}{EC}$$

$$\Rightarrow AC = 5n \text{ y } EC = 2n$$

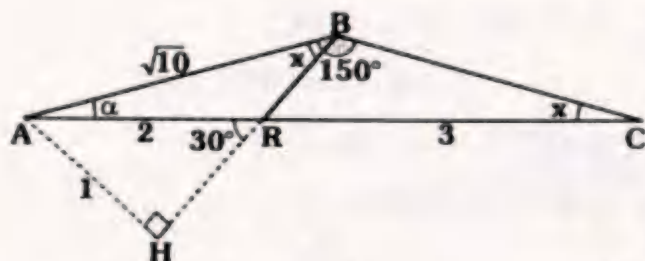
- En  $\triangle ABC$ ,  $\overline{BE}$  es bisectriz interior:

$$\frac{x}{12} = \frac{3n}{2n}$$

$$\therefore x = 18$$

**Clave D**

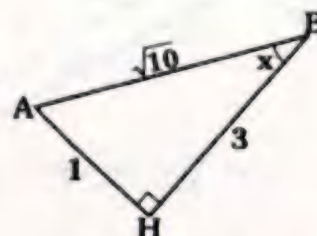
**RESOLUCIÓN N° 53**



- Nos piden  $x$ .
- Como  $m\angle ACB = m\angle ABR$ , por propiedad:

$$(AB)^2 = (2)(5) \Rightarrow AB = \sqrt{10}$$

- En  $\triangle AHR$ : notable de  $30^\circ \Rightarrow AH = 1$
- En  $\triangle AHB$ :

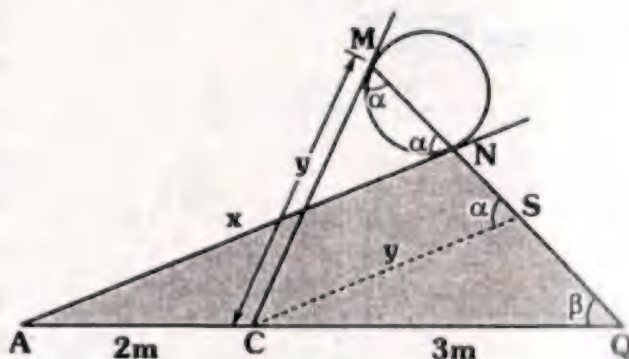


Notemos que es notable.

$$\therefore x = \frac{37^\circ}{2} = 18,5^\circ$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 54**



- Nos piden  $x/y$ .
- Se traza  $\overline{CS} \parallel \overline{AN} \Rightarrow \triangle CMS$ : isósceles  $\Rightarrow CM = CS = y$

$$\triangle CSQ \sim \triangle ANQ \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5m}{3m}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{5}{3}$$

**Clave D**







**RESOLUCIÓN N° 60**

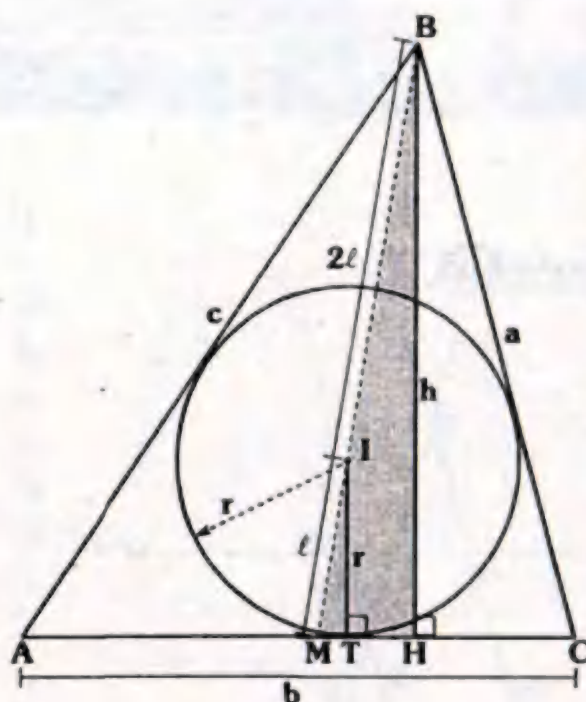
- Sea "b" el término intermedio de la P.A.  
de a, b y c  $\Rightarrow b = \frac{a+c}{2}$
- Nos piden  $r/h$ .
- Sea I el incentro del  $\triangle ABC$ , por teorema:

$$\Rightarrow \frac{BI}{IM} = \frac{a+c}{b} = 2$$

- $\triangle MTI \sim \triangle MHB$

$$\Rightarrow \frac{r}{h} = \frac{\ell}{3\ell}$$

$$\therefore \frac{r}{h} = \frac{1}{3}$$

**Clave B**





- Como los triángulos ABC y CDE son equiláteros:

$$\Rightarrow \overline{AB} // \overline{CD} \text{ y } \overline{BC} // \overline{DE}$$

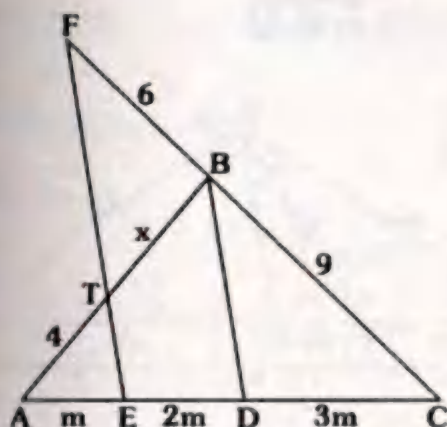
- Por teorema de Tales:

$$OB = xk, BD = mk \text{ y } \frac{x+m}{n} = \frac{x}{m}$$

$$\therefore x = \frac{m^2}{n-m}$$

**Clave** **D**

**RESOLUCIÓN N° 64**



Piden x.

- Por teorema de Tales:

$$\Rightarrow \frac{ED}{DC} = \frac{6}{9} \Rightarrow ED = 2m \text{ y } DC = 3m$$

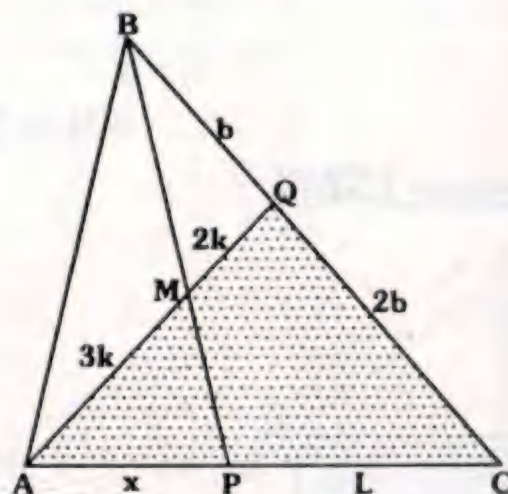
- Como  $AD = DC \Rightarrow AE = m$

- Como  $\overline{ET} // \overline{BD} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{2m}{m}$

$$\therefore x = 8$$

**Clave** **C**

**RESOLUCIÓN N° 65**



Piden x.

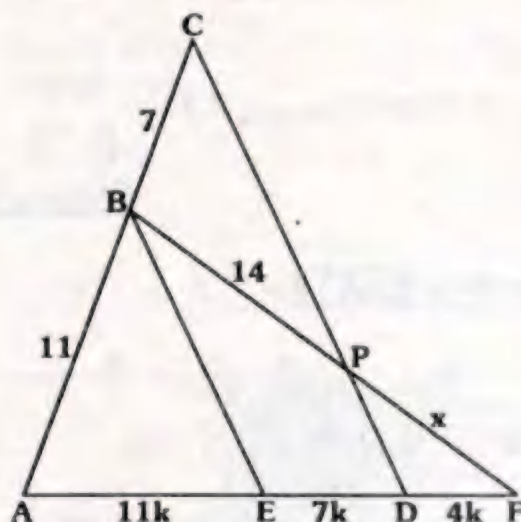
- Por teorema de Menelao en el  $\triangle ABC$  ( $\overline{PMB}$  es recta secante):

$$x(2k)(3b) = (3k)L(3b)$$

$$\therefore x = \frac{L}{2}$$

**Clave** **B**

**RESOLUCIÓN N° 66**



Piden x.

- Por teorema de Tales:

$$\text{Como } \overline{BE} // \overline{CD} \Rightarrow AE = 11k \text{ y } ED = 7k$$

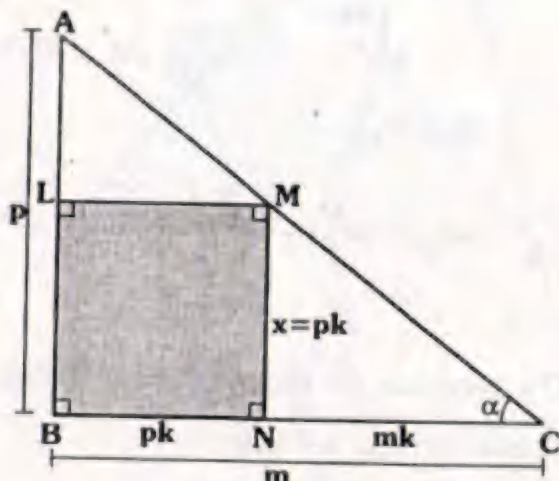


Como  $\overline{BE} \parallel \overline{PD} \Rightarrow \frac{x}{14} = \frac{4k}{7k}$

$\therefore x = 8$

Clave **C**

**RESOLUCIÓN N° 67**



Nos piden el perímetro del cuadrado (BLMN)

•  $\triangle ABC \sim \triangle MNC \Rightarrow NM = pk$  y  $NC = mk$

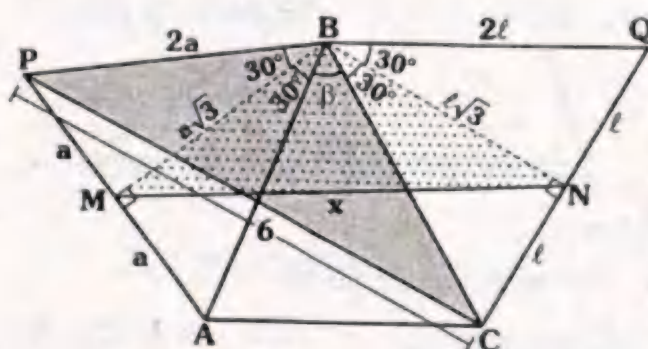
•  $pk + mk = m \Rightarrow k = \frac{m}{p+m}$

$\Rightarrow x = \frac{mp}{m+p}$

$\therefore \text{Perímetro}_{(BLMN)} = 4x = \frac{4mp}{m+p}$

Clave **A**

**RESOLUCIÓN N° 68**



• Piden MN

• Como  $\overline{BM}$  y  $\overline{BN}$  son medianas (alturas y bisectrices), entonces:

$m\angle PBC = m\angle MBN = 60^\circ + \beta$

• También:  $\frac{PB}{BC} = \frac{BM}{BN} = \frac{a}{l}$

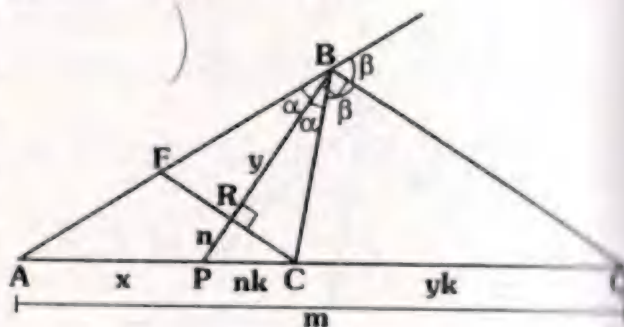
$\Rightarrow \triangle PBC \sim \triangle MBN$

$\Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{2a}$

$\therefore x = 3\sqrt{3}$

Clave **D**

**RESOLUCIÓN N° 69**



• Nos piden  $xy$  en función de  $m$  y  $n$ .

• Por teorema de Tales:

$\frac{BR}{RP} = \frac{CQ}{PC} = \frac{y}{n}$

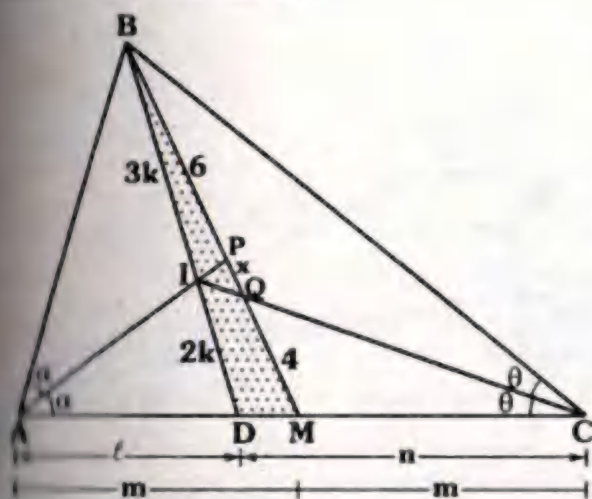
• A, P, C y Q: cuaterna armónica

• Como  $\overline{ET} \parallel \overline{BD} \Rightarrow \frac{x}{nk} = \frac{m}{yk}$

$\therefore xy = mn$

Clave **B**

**RESOLUCIÓN N° 70**



Piden x.

• Por teorema de Menelao, en el  $\triangle DBM$ :

$$\ell(3k)(x+4) = 6(2k)m \Rightarrow \frac{\ell}{m} = \frac{4}{x+4} \dots (I)$$

$$m(x+6)(2k) = (3k)(4)n \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{x+6}{6} \dots (II)$$

• De (I) y (II):

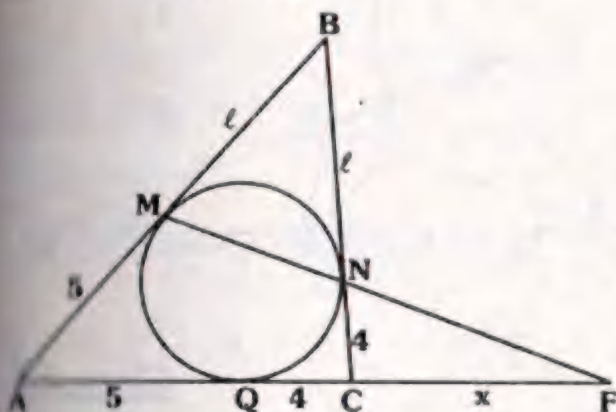
$$\frac{\ell}{m} + \frac{n}{m} = \frac{4}{x+4} + \frac{x+6}{6}$$

$$2 = \frac{4}{x+4} + \frac{x+6}{6}$$

$$\therefore x = 2$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 71**



Piden x.

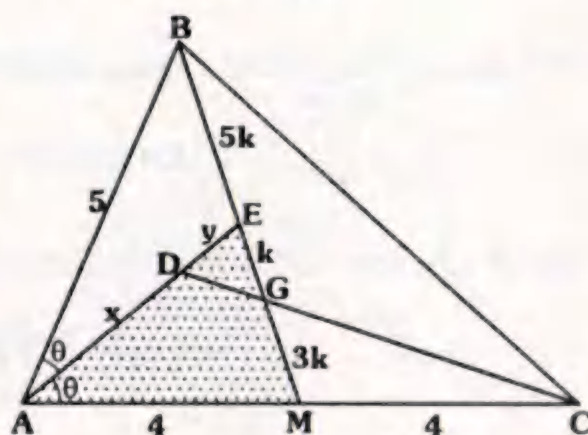
• Como A, Q, C y F forman una cuaterna armónica, entonces

$$\frac{x}{4} = \frac{9+x}{5}$$

$$\therefore x = 36$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 72**



Piden x/y.

• Como G es baricentro del  $\triangle ABC$ , entonces:  $GB = 2(GM)$

• Sea  $GM = 3k \Rightarrow BG = 6k$

• Como  $\overline{AE}$  es bisectriz interior del  $\triangle ABM \Rightarrow BE = 5k$  y  $EM = 4k$

• Teorema de Menelao en el  $\triangle AEM$ :

$$x(k)(4) = y(3k)(8)$$

$$\therefore \frac{x}{y} = 6$$

**Clave B**





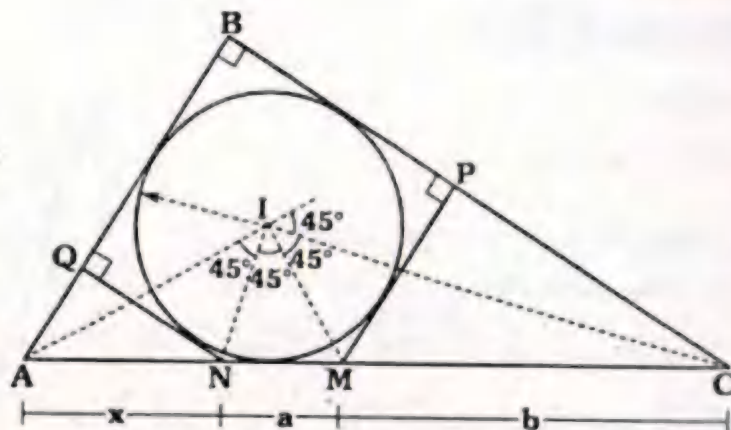
**RESOLUCIÓN N° 75**

Nos piden  $x$ .

- Como A, N, M y C es una cuaterna armónica

$$\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{x+a+b}{b}$$

$$\therefore x = \frac{a(a+b)}{b-a}$$



**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 76**

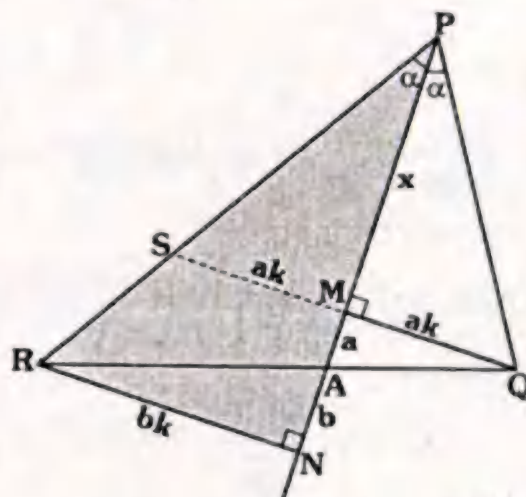
Nos piden  $x$ .

- $\triangle RNA \sim \triangle QMA \Rightarrow RN=bk$  y  $MQ=ak$

- $\triangle SPQ$ : isósceles  $\Rightarrow SM=MQ=ak$

- $\triangle RNP \sim \triangle SMP \Rightarrow \frac{x}{ak} = \frac{x+a+b}{bk}$

$$\therefore x = \frac{a(a+b)}{b-a}$$



**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 77**

Nos piden  $x$ .

- Como  $\overline{L}$  es mediatriz

$$\Rightarrow m\angle MBF = m\angle MFB = \theta$$

- Sea  $m\angle BAM = \alpha \Rightarrow m\angle LBF = \alpha + \theta$

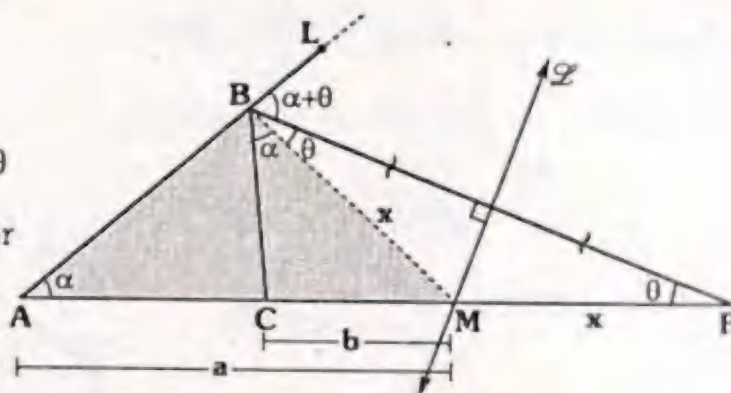
- Como  $\overline{BF}$  es bisectriz exterior

$$\Rightarrow m\angle CBM = \alpha$$

- En  $\triangle ABM$ : propiedad de semejanza

$$\Rightarrow x^2 = \frac{ba}{16}$$

$$\therefore x = 4$$

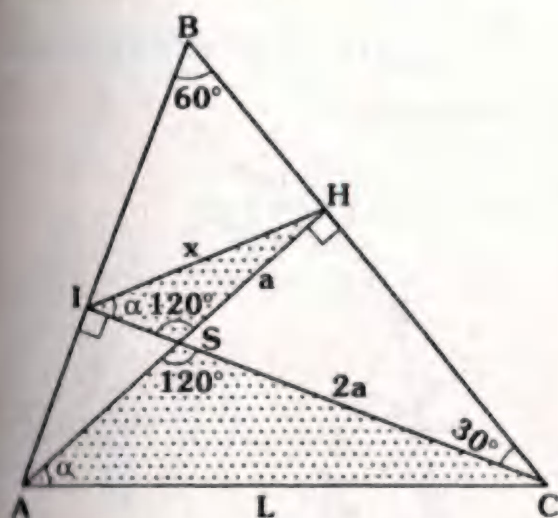


**Clave D**





**RESOLUCIÓN N° 80**



Piden x.

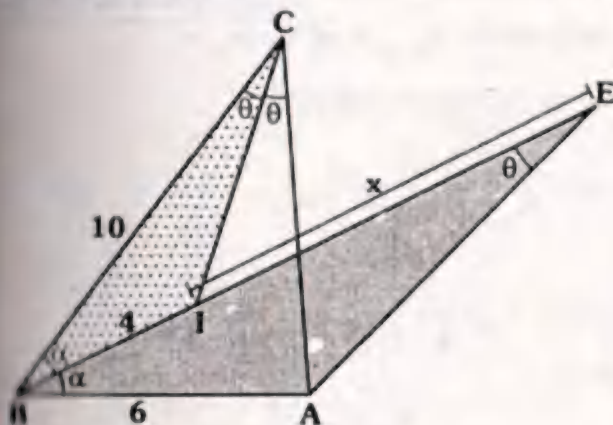
- $\triangle SHC$ : notable de  $30^\circ$  y  $60^\circ \Rightarrow HS=a$  y  $SC=2a$

$$\bullet \triangle ASC \sim \triangle ISH \Rightarrow \frac{x}{L} = \frac{a}{2a}$$

$$\therefore x = \frac{L}{2}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 81**



Nos piden x.

- Como I es incentro

$$\Rightarrow m\angle CBI = m\angle IBA = \alpha \text{ y}$$

$$m\angle BCI = m\angle ICA = \theta$$

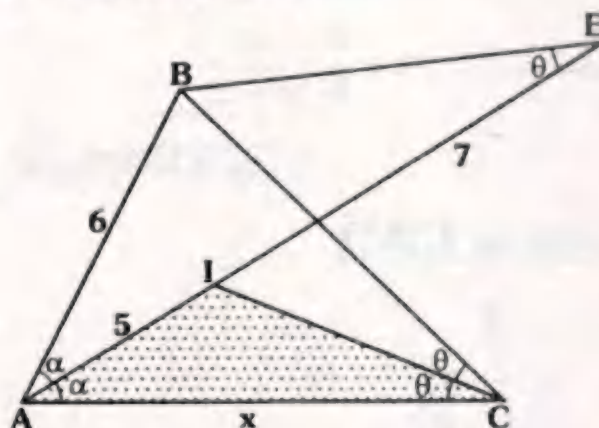
- E es excentro  $\Rightarrow m\angle BEA = \theta$

$$\bullet \triangle BIC \sim \triangle BAE \Rightarrow \frac{x+4}{10} = \frac{6}{4}$$

$$\therefore x = 11$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 82**



Nos piden x.

- Como E es excentro del  $\triangle ABC$

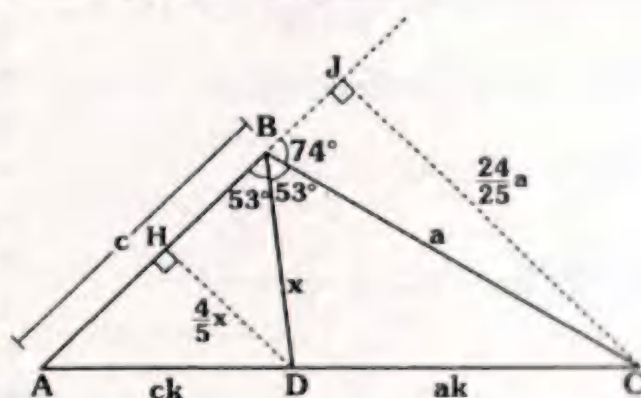
$$\Rightarrow m\angle AEB = \frac{m\angle ACB}{2} = \theta$$

$$\bullet \triangle ABE \sim \triangle AIC \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{5}{6}$$

$$\therefore x = 10$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 83**



Piden x.



- Por teorema de la bisectriz  $AD=ck$  y  $DC=ak$

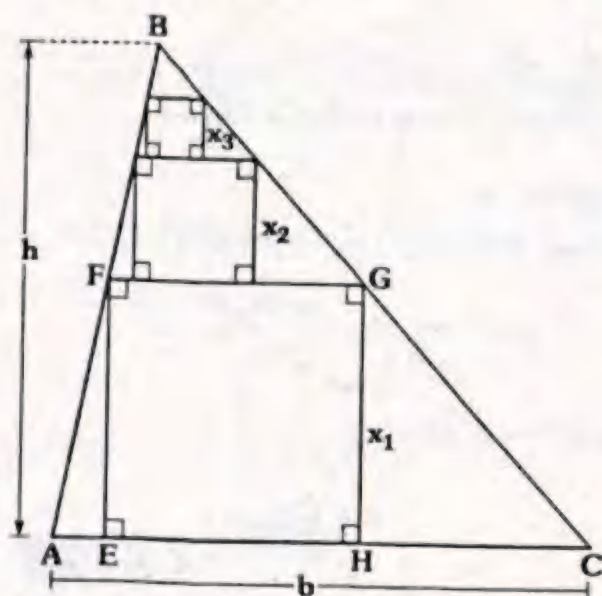
•  $\triangle AHD \sim \triangle AJC$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{4x}{5}\right)}{\left(\frac{24}{25}a\right)} = \frac{c}{(a+c)}$$

$$\therefore x = \frac{6}{5} \cdot \frac{ac}{(a+c)}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 84**



Por demostrar:  $x_n = \frac{bh^n}{(b+h)^n}$

Procedamos por inducción:

• Probemos  $x_1 = \frac{bh}{b+h}$

•  $\triangle ABC \sim \triangle FBG \Rightarrow \frac{x_1}{b} = \frac{h-x_1}{h}$

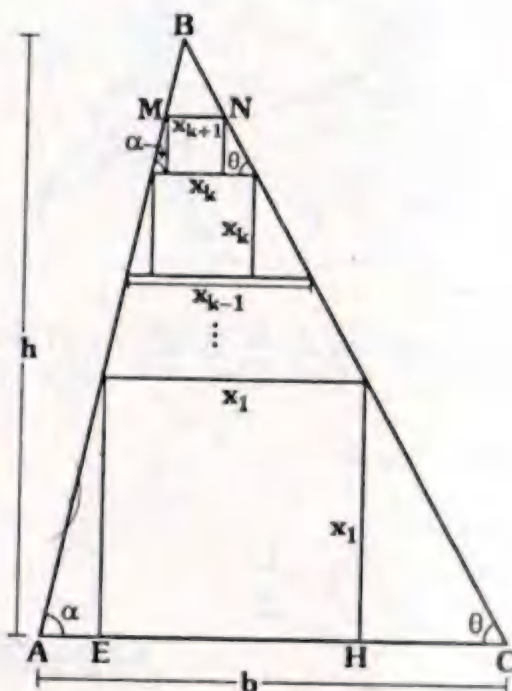
$\therefore x_1 = \frac{bh}{b+h}$

- Supongamos que es válido:

$x_k = \frac{bh^k}{(b+h)^k} \dots$  Hipótesis inductiva

- Por demostrar:

$x_{k+1} = \frac{bh^{k+1}}{(b+h)^{k+1}}$



- En el  $\triangle ABC$  está inscrito el cuadrado cuyo lado mide  $x_{k+1}$  y  $MN = x_k$ .

- Como  $\triangle MBN \sim \triangle ABC$

$\Rightarrow \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{x_1}{b} \Rightarrow x_{k+1} = \frac{x_1 x_k}{b} \dots (I)$

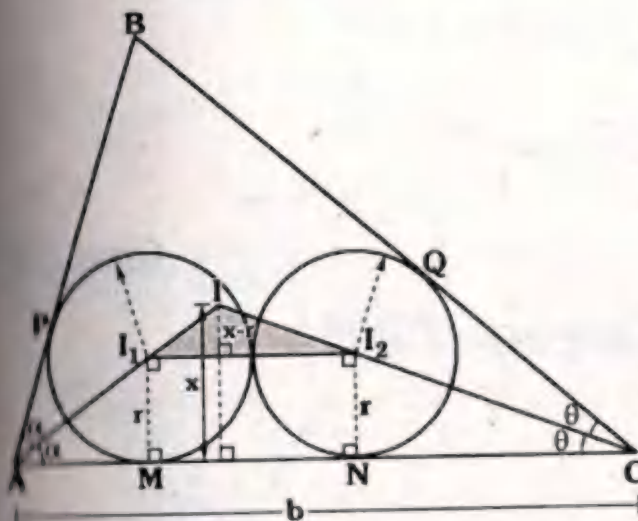
• Como  $x_1 = \frac{bh}{b+h}$  y  $x_k = \frac{bh^k}{(b+h)^k}$

- En (I):

$x_{k+1} = \frac{1}{b} \cdot \frac{bh}{b+h} \cdot \frac{bh^k}{(b+h)^k}$

$\therefore x_{k+1} = \frac{bh^{k+1}}{(b+h)^{k+1}}$

**RESOLUCIÓN N° 85**



Piden el inradio (x) del  $\triangle ABC$ .

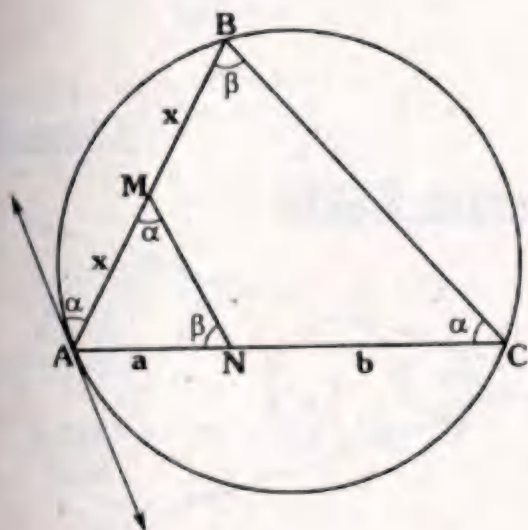
$$\triangle I_1 I_2 \sim \triangle AIC$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x-r} = \frac{b}{2r}$$

$$\therefore x = \frac{br}{b-2r}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 86**



Piden AB.

- Como M es punto medio de  $\overline{AB}$   
 $\Rightarrow AM=MB=x$ , luego  $AB=2x$ .

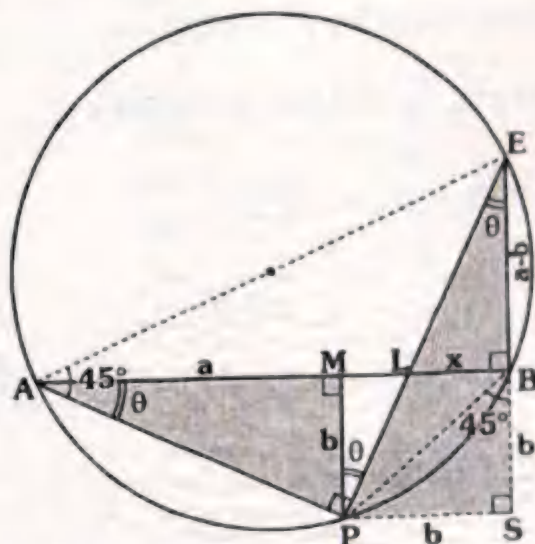
$$\triangle AMN \sim \triangle ACB:$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a+b} = \frac{a}{2x} \Rightarrow x = \sqrt{\frac{a(a+b)}{2}}$$

$$\therefore AB = \sqrt{2a(a+b)}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 87**



Piden LB.

- Por ángulo inscrito:

$$m\angle PAB = m\angle PEB = \theta$$

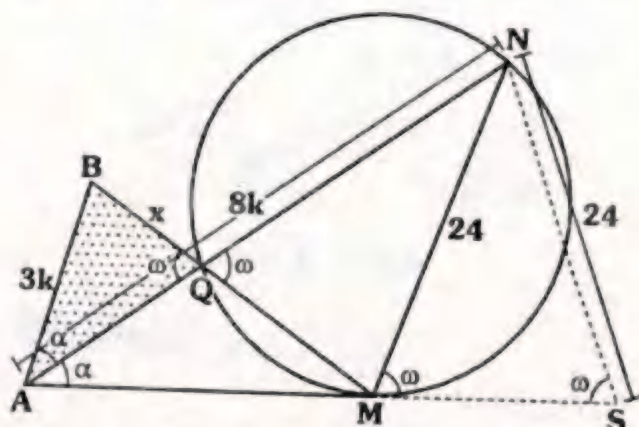
$$\triangle AMP \sim \triangle ESP \Rightarrow PS=b$$

$$\triangle LBE \sim \triangle PSE \Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{a-b}{a}$$

$$\therefore x = \frac{b}{a}(a-b)$$

**Clave E**



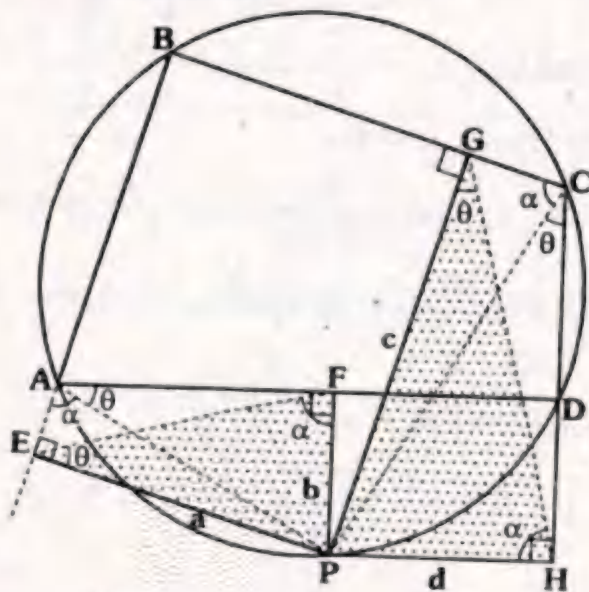


Nos piden x.

- Como  $m\angle NQM = m\angle NMS = \omega$
- Se traza  $\overline{NS}$  tal que  $m\angle NSM = \omega$
- $\triangle AQB \sim \triangle ASN \Rightarrow \frac{x}{24} = \frac{3k}{8k}$

$$\therefore x = 9$$

**Clave E**



$$\text{Sea ad} = 8u^2$$

160

❖ Nos piden bc.

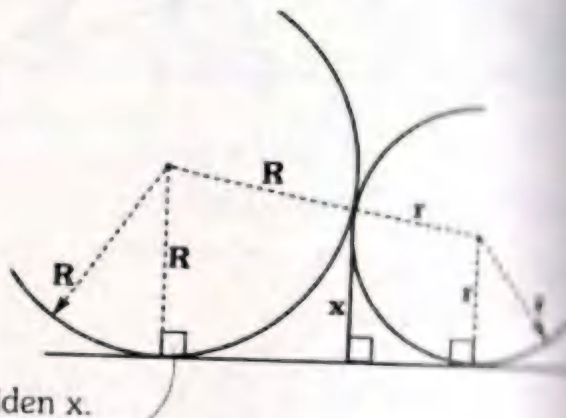
- Al completar ángulos, notamos

$\Delta EFP \sim \Delta GHP$

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow ad = bc$$

$$\therefore bc = 8u^2$$

Clave A



Piden x.

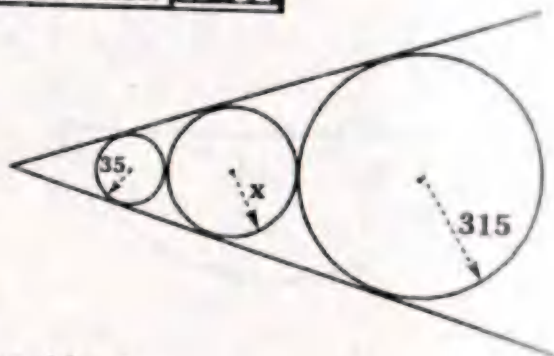
- Por propiedad de semejanza.

$$x = \frac{Rr + rR}{R + r} \Rightarrow \frac{2}{x} = \underbrace{\frac{1}{R} + \frac{1}{r}}_{0.25}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore x = 8$$

**Clave** 19



Nos piden x.

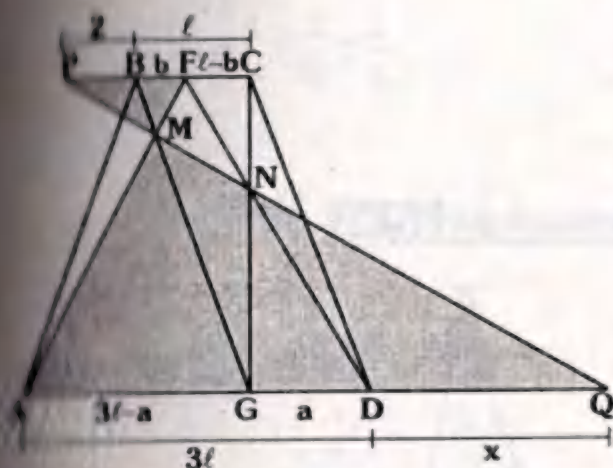
Por propiedad:

$$x^2 = (35)(315)$$

$$\therefore x = 105$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 92**



Entonces:

$$\triangle PMF \sim \triangle QMA$$

$$\frac{x+a}{3l-a} = \frac{2}{b} \Rightarrow \frac{x+a}{3l+x} = \frac{2}{b+2}$$

$$\Rightarrow (x+a)(b+2) = 2(3l+x) \quad \dots(I)$$

$$\triangle AGNQ \sim \triangle CNP$$

$$\frac{b+2}{l-b} = \frac{x}{a} \Rightarrow \frac{b+2}{l+2} = \frac{x}{x+a}$$

$$\Rightarrow (x+a)(b+2) = x(l+2) \quad \dots(II)$$

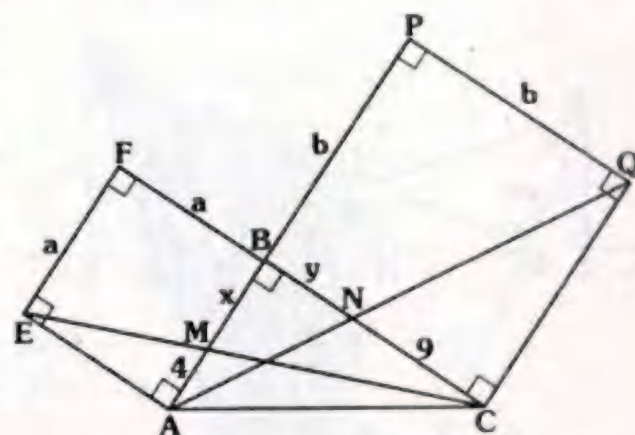
De (I) y (II):

$$\Rightarrow 2(3l+x) = x(l+2)$$

$$\therefore x = 6$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 93**



Nos piden AB.

Notemos:

$$\triangle EFC \sim \triangle MBC \Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{a}{a+b}$$

$$\Rightarrow x = \frac{ab}{a+b} \quad \dots(I)$$

$$\triangle ABN \sim \triangle APQ \Rightarrow \frac{y}{a} = \frac{b}{a+b}$$

$$\Rightarrow y = \frac{ab}{a+b} \quad \dots(II)$$

Luego deducimos:  $x=y$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle EAM \sim \triangle CBM \Rightarrow \frac{4}{x} = \frac{a}{b} \\ \triangle NBA \sim \triangle NCQ \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{a}{b} \end{array} \right\} \frac{4}{x} = \frac{x}{9}$$

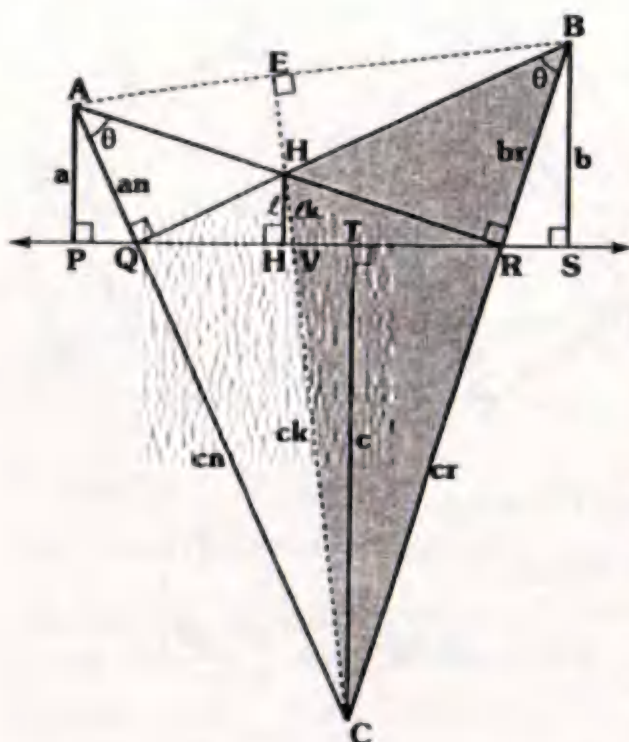
$$\Rightarrow x=6$$

$$\therefore AB = 10$$

**Clave B**



**RESOLUCIÓN N° 94**



Por demostrar:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{l}$

• Notamos que H es ortocentro del  $\triangle ABC$ .

•  $\triangle PAQ \sim \triangle TCQ \Rightarrow \frac{AQ}{QC} = \frac{a}{n}$

•  $\triangle HUV \sim \triangle CTV \Rightarrow \frac{HV}{VC} = \frac{l}{c}$

•  $\triangle CTR \sim \triangle BSR \Rightarrow \frac{BR}{RC} = \frac{b}{c}$

• En  $\triangle ABC$ : Por teorema de Van Aubel

$$\frac{c}{a} + \frac{c}{b} = \frac{CH}{HE}$$

• Como C, V, H y E forman una cuaterna armónica

$$\Rightarrow \frac{c}{l} = \frac{CE}{HE} = \frac{CH+HE}{HE}$$

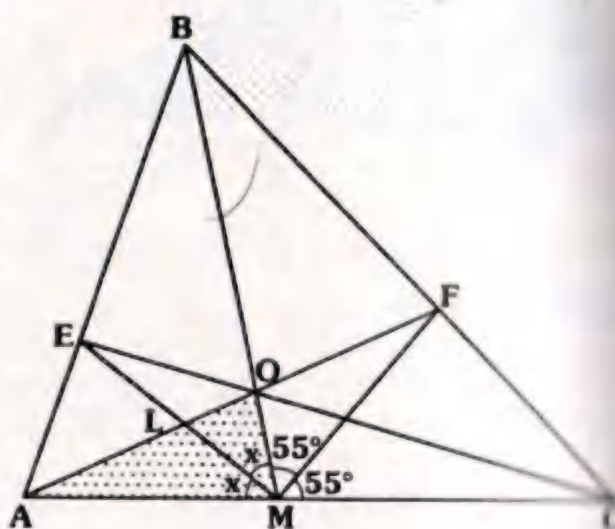
$$\Rightarrow \frac{c}{l} = \frac{CH}{HE} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{c-l}{l} = \frac{CH}{HE}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a} + \frac{c}{b} = \frac{c-l}{l} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{c-l}{l}$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{l}$$

**RESOLUCIÓN N° 95**



Nos piden x.

• Como A, L, O y F es cuaterna armónica y  $\overline{MF}$  es bisectriz del  $\angle OMC \Rightarrow$  de las observaciones de las páginas 53 y 54,  $\overline{ML}$  es bisectriz del  $\angle OMA$

$$\Rightarrow 2(x+55^\circ) = 180^\circ$$

$$\therefore x = 35^\circ$$

**Clave** C

**RESOLUCIÓN N° 96**

Buscamos  $x$ .

$\triangle AMOE \sim \triangle SFO$

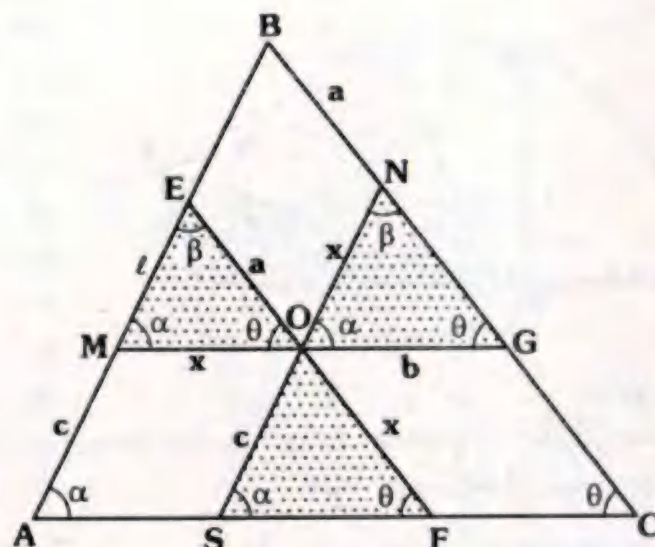
$$\Rightarrow \frac{\ell}{c} = \frac{a}{x} \Rightarrow \ell = \frac{ac}{x} \quad \dots(I)$$

$\triangle AMOE \sim \triangle OGN$

$$\Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{\ell}{x} \Rightarrow x^2 = b\ell \quad \dots(II)$$

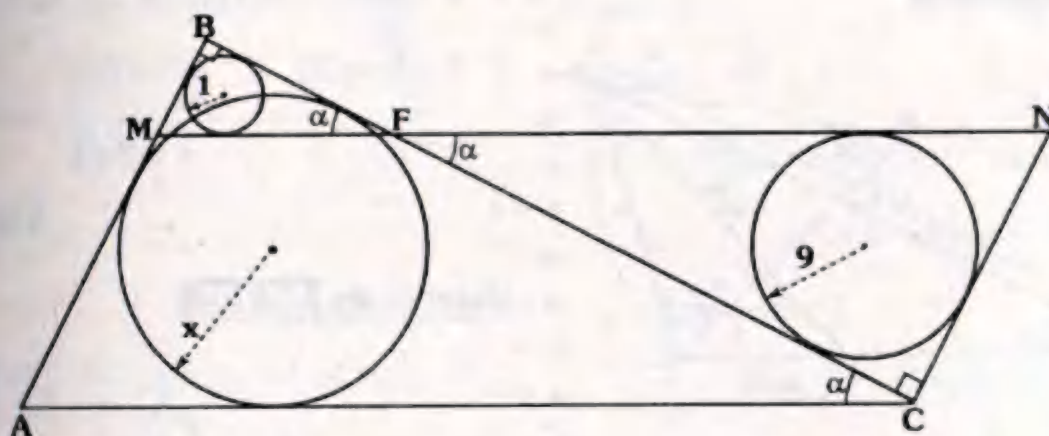
De (I) y (II):

$$\therefore x = \sqrt[3]{abc}$$



**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 97**



Buscamos  $x$ .

Notemos que AMNC es un paralelogramo  $\Rightarrow AC = MN$

$\triangle ABC \sim \triangle MBF \sim \triangle FCN$

$$\Rightarrow \frac{x}{AC} = \frac{1}{MF} = \frac{9}{FN} = \frac{1+9}{MF+FN} \Rightarrow \frac{x}{AC} = \frac{10}{MN}$$

$$\therefore x = 10$$

**Clave C**



$$\therefore x = \sqrt{b(a+b)}$$
$$\therefore x = 10$$
$$\therefore r = 2\sqrt{3}$$

A diagram showing a large triangle \$ABC\$. Point \$P\$ lies on side \$AB\$, and point \$Q\$ lies on side \$AC\$. A line segment connects \$P\$ and \$Q\$. The following information is provided:

- Side lengths: \$AP = 8\$, \$BQ = 6\$, and \$QC = 12\$.
- Angles: \$\angle PAQ = \alpha\$, \$\angle BPQ = \theta\$, \$\angle PQC = \theta\$, and \$\angle BCQ = \beta\$.
- The total length of side \$AC\$ is denoted by \$x\$.

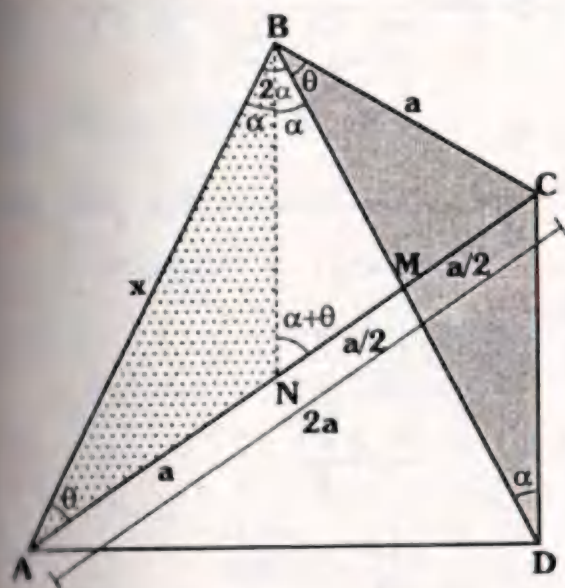
- Nos damos cuenta que:  $\triangle ACP \sim \triangle PCQ$

$$\Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{8}{6}$$

$$\therefore x = 16$$

Clave **E**

**RESOLUCIÓN N° 102**



Nos piden  $x$ .

Dato  $BD = 5$

- En  $\triangle ABC$ , por propiedad de semejanza:

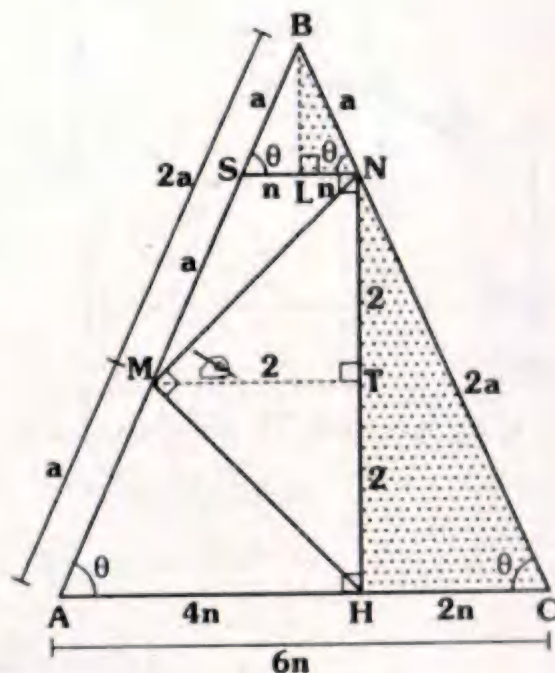
$$a^2 = (MC)2a \Rightarrow MC = \frac{a}{2}$$

- Se traza la bisectriz  $\overline{BN}$  del  $\triangle ABM \Rightarrow BA = NC = a$
- $\triangle ANB \cong \triangle CBD$  (ALA)

$$\therefore x = 5$$

Clave **C**

**RESOLUCIÓN N° 103**



Piden  $AC$ .

- Se traza  $\overline{MT} \perp \overline{NH}$  ( $T$  en  $\overline{NH}$ ) y  $\overline{NS} \parallel \overline{AC}$
- En el trapecio  $SNHA$ ,  $\overline{MT}$  es base media

$$\Rightarrow AM = MS = a \text{ y } SB = a$$

$$\triangle SBN \sim \triangle ABC$$

$$\Rightarrow AC = 3(SN) = 6n$$

- En  $SNHA$ :

$$\Rightarrow 2 = \frac{4n + 2n}{2}$$

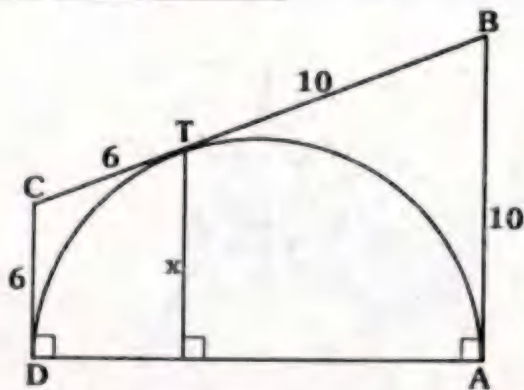
$$\Rightarrow n = \frac{2}{3}$$

$$\therefore AC = 6\left(\frac{2}{3}\right) = 4$$

Clave **C**



**RESOLUCIÓN N° 104**



Nos piden x.

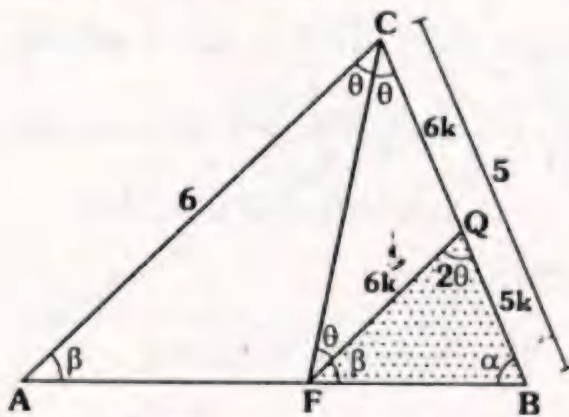
- En el trapecio ABCD, por propiedad:

$$\Rightarrow x = \frac{6 \times 10 + 10 \times 6}{6 + 10}$$

$$\therefore x = 7,5$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 105**



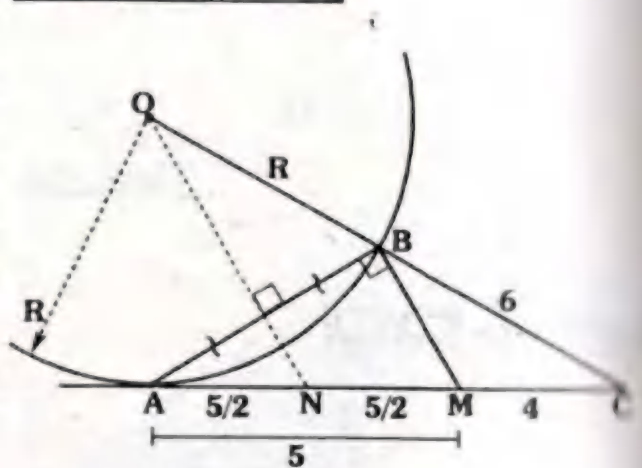
Nos piden BQ.

- $\triangle FQB \sim \triangle ACB \Rightarrow FQ = 6k$  y  $QB = 5k$
- Como  $\triangle FQC$  es isósceles  $\Rightarrow FQ = CQ = 6k$
- $5k + 6k = 5 \rightarrow k = \frac{5}{11}$

$$\therefore BQ = 5k = \frac{25}{11}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 106**



Piden R.

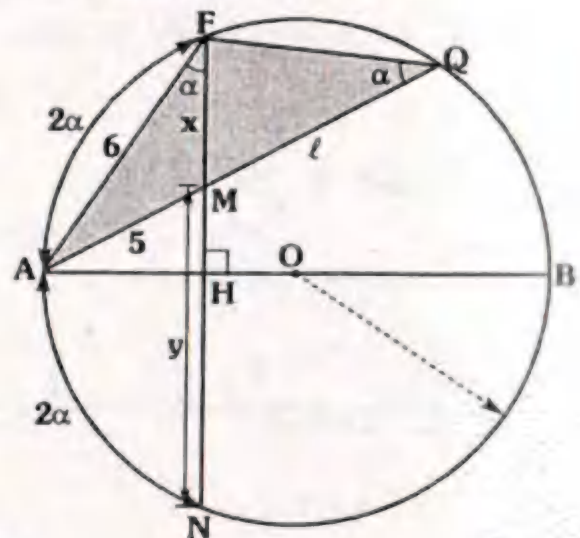
- Se traza la mediatriz de  $\overline{AB}$  hasta que corte a  $\overline{AM}$  en N  $\Rightarrow AN = NM = \frac{5}{2}$
- Por teorema de Tales:

$$\frac{R}{6} = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)}{4}$$

$$\therefore x = \frac{15}{4} = 3,75u$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 107**



Piden xy.

En  $\triangle AFQ$ :

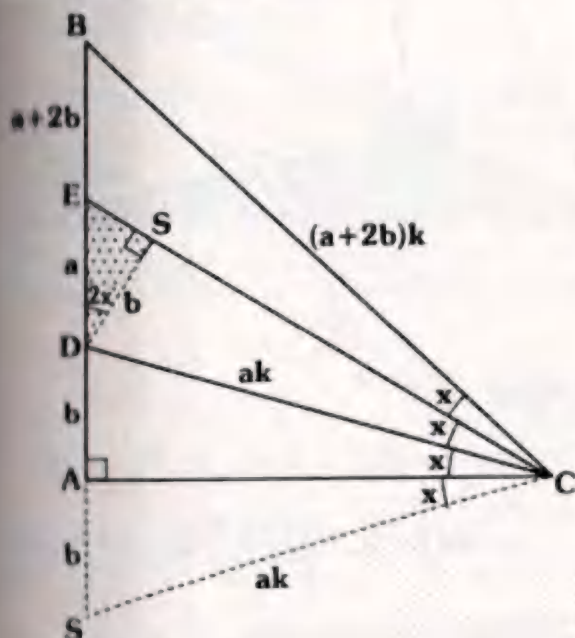
$$6^2 = 5(5 + \ell) \Rightarrow \ell = \frac{11}{5}$$

Como  $xy = 5\ell$

$$\therefore xy = 11u^2$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 108**



Nos piden  $x$ .

Por teorema de la bisectriz en el  $\triangle SCB$ :

$$\frac{a}{a+2b} = \frac{b}{b} \Rightarrow a = b\sqrt{2}$$

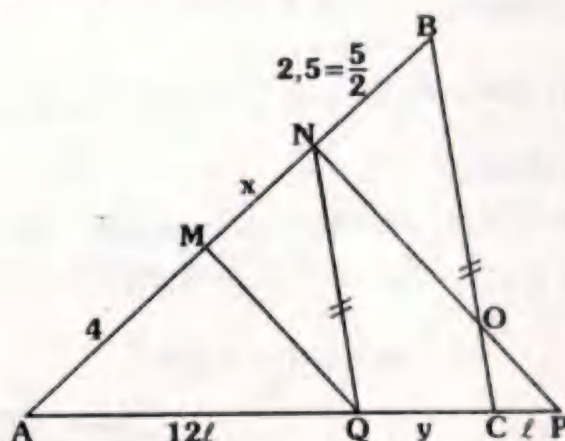
En  $\triangle DSE$ :

$$2x = 45^\circ$$

$$\therefore x = 22,5^\circ$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 109**



Nos piden  $OP/ON$ .

• Por teorema de Tales:  $\frac{OP}{ON} = \frac{\ell}{y}$

• Como:

$$\frac{x}{4} = \frac{y+\ell}{12\ell} \Rightarrow x = \frac{y+\ell}{3\ell} \quad \dots(I)$$

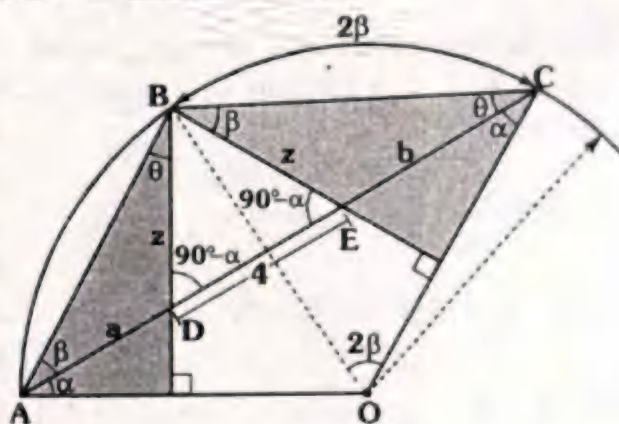
$$\frac{2y}{5} = \frac{12\ell}{4+x} \Rightarrow y(4+x) = 30\ell \quad \dots(II)$$

• De (I) y (II):  $y = 5\ell$  y  $x = 2\ell$

$$\therefore \frac{OP}{ON} = \frac{1}{5}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 110**



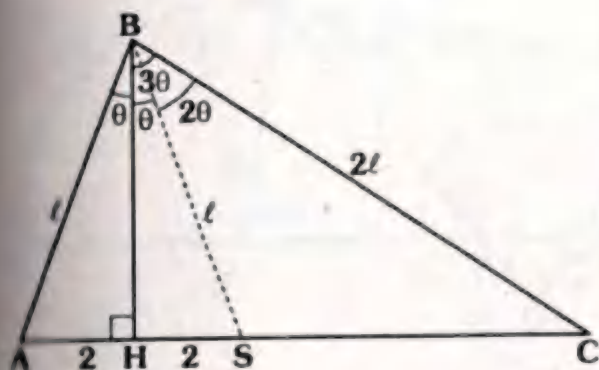
Nos piden  $m\angle ABC$ .

Dato:  $ab = 16u^2$  y  $DE = 4u$





**RESOLUCIÓN N° 113**



Nos piden AC.

• Sea  $AH = HS = 2$

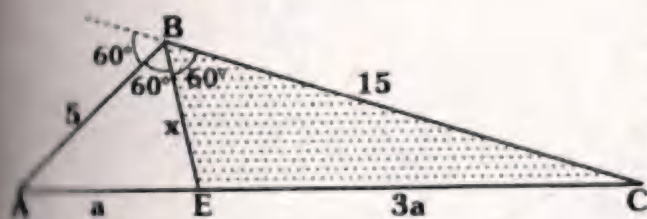
$\Rightarrow m\angle ABH = m\angle HBS \Rightarrow \overline{BS}$  es bisectriz interior del  $\triangle ABC$ :

$$\Rightarrow \frac{l}{2l} = \frac{4}{SC} \Rightarrow SC = 8$$

$$\therefore AC = 12$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 114**



Nos piden x.

• Por teorema de la bisectriz interior en el  $\triangle ABC$ :

$$EC = 3(EA)$$

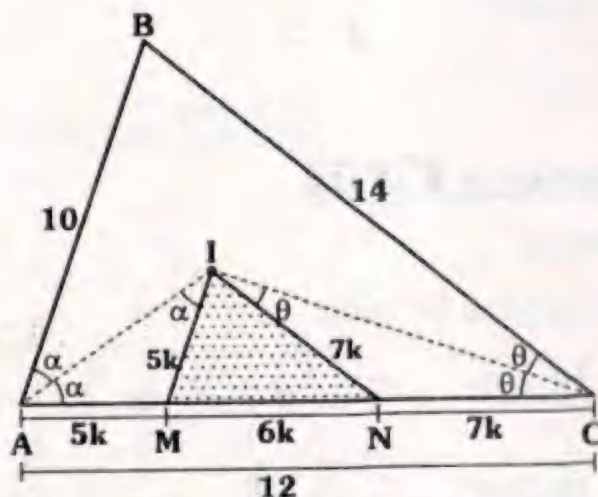
• Por teorema de la bisectriz exterior en el  $\triangle EBC$ :

$$\Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{a}{4a}$$

$$\therefore x = \frac{15}{4}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 115**



Nos piden MN.

•  $\triangle ABC \sim \triangle MIN$

$$\Rightarrow MI = 5k, IN = 7k \text{ y } MN = 6k$$

•  $\triangle AMI$  y  $\triangle NIC$ : isósceles

$$\Rightarrow AM = MI \text{ y } NC = NI = 7k$$

• Luego:

$$\frac{5k + 6k + 7k}{18k} = 12$$

$$\Rightarrow \frac{6k}{MN} = 4$$

$$\therefore MN = 4$$

**Clave D**



**RESOLUCIÓN N° 116**

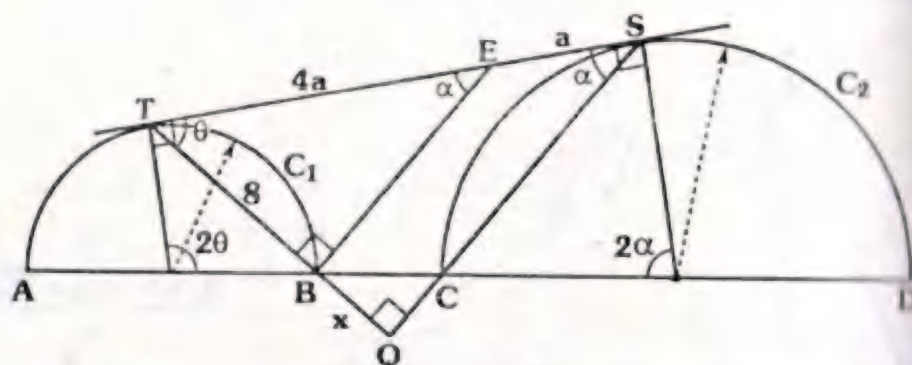
Nos piden  $x$ .

- Notemos que

$$\alpha + \theta = 90^\circ \Rightarrow \overline{BE} \parallel \overline{QS}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{a}{4a}$$

$$\therefore x = 2$$



Clave **B**

**RESOLUCIÓN N° 117**

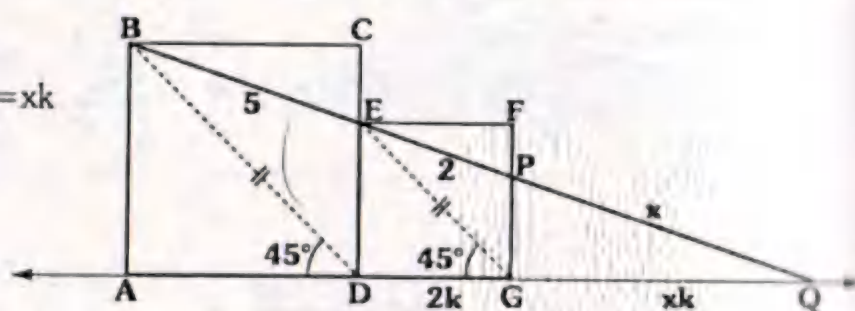
Piden  $x$ .

- Teorema de Tales:

$$\overline{DE} \parallel \overline{GP} \Rightarrow DG = 2k \text{ y } GQ = xk$$

$$\overline{DB} \parallel \overline{GE} \Rightarrow \frac{x+2}{5} = \frac{x}{2k}$$

$$\therefore x = \frac{4}{3}$$



Clave **C**

**RESOLUCIÓN N° 118**

Piden  $\frac{AH}{HC}$ .

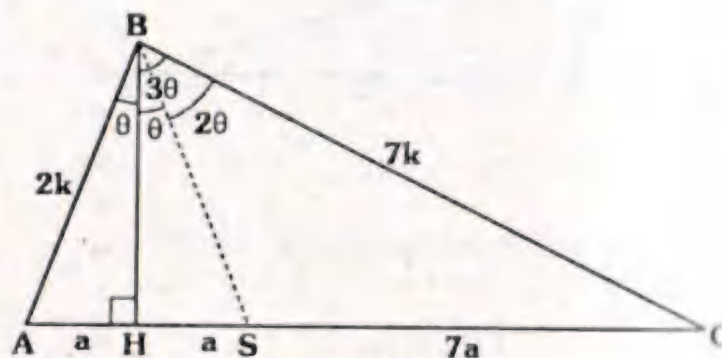
- Se traza  $\overline{BS}$  tal que  $m\angle HBS = \theta$

$$\Rightarrow AH = HS = a$$

- Como  $\overline{BS}$  es bisectriz en  $\triangle ABC$

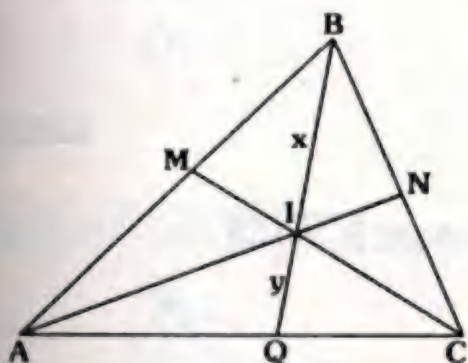
$$\Rightarrow SC = 7a$$

$$\therefore \frac{AH}{HC} = \frac{1}{8}$$



Clave **A**

**RESOLUCIÓN N° 119**



Piden  $x/y$ .

Dato:  $\frac{MB}{MA} + \frac{BN}{NC} = \frac{3}{4}$

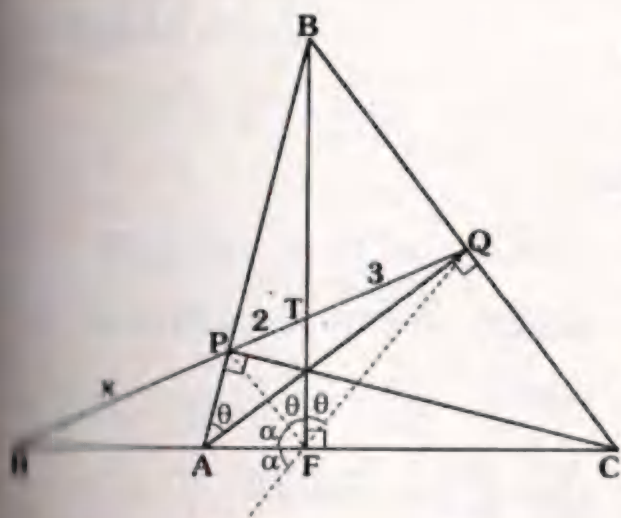
• Aplicación del teorema de Van Aubel:

$$\frac{x}{y} = \frac{MB}{MA} + \frac{BN}{NC}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{3}{4}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 120**



Nos piden  $x$ .

• Notamos que para el  $\triangle FPQ$ :

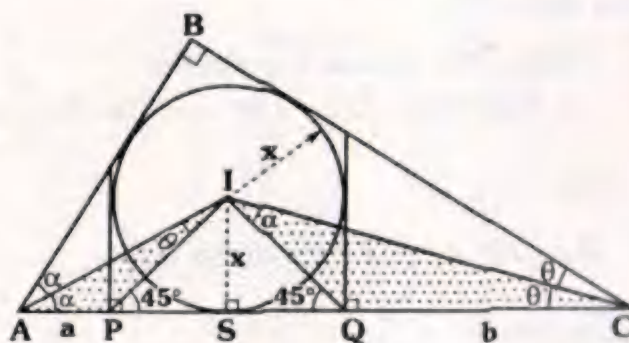
$\overline{FT}$  es bisectriz interior y  $\overline{FR}$  es bisectriz exterior, luego R, P, T y Q forman una cuaterna armónica:

$$\frac{x}{2} = \frac{x+5}{3}$$

$$\therefore x = 10$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 121**



Nos piden  $r$ .

Dato:  $ab = 72$

• Sea  $m\angle AIP = \theta$  y  $m\angle BAI = m\angle IAC = \alpha$

$$\Rightarrow \alpha + \theta = 45^\circ \text{ luego } m\angle ACB = 2\theta$$

•  $\angle PSI$  y  $\angle ISQ$ : notables de  $45^\circ$

$$\Rightarrow IP = IQ = x\sqrt{2}$$

•  $\triangle AIP \sim \triangle ICQ$

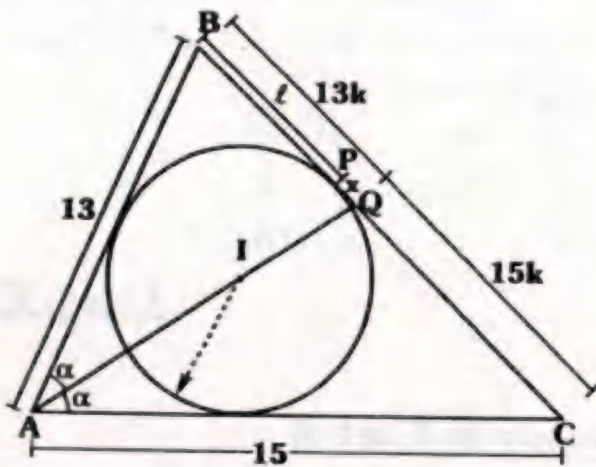
$$\Rightarrow \frac{x\sqrt{2}}{a} = \frac{b}{x\sqrt{2}}$$

$$\therefore x = 6$$

**Clave D**



**RESOLUCIÓN N° 122**



Nos piden PQ.

- Como  $\overline{AQ}$  es bisectriz interior  
 $\Rightarrow BQ = 13k$  y  $QC = 15k \Rightarrow 28k = 14$   
 $\Rightarrow k = \frac{1}{2}$

- Por propiedad de circunferencia:

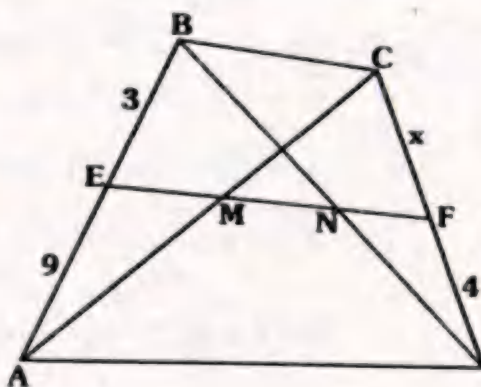
$$\ell = \frac{P_{\triangle ABC}}{2} - 15 = 6$$

- $PQ = 13k - 6$

$$\therefore PQ = \frac{1}{2}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 123**



Piden x.

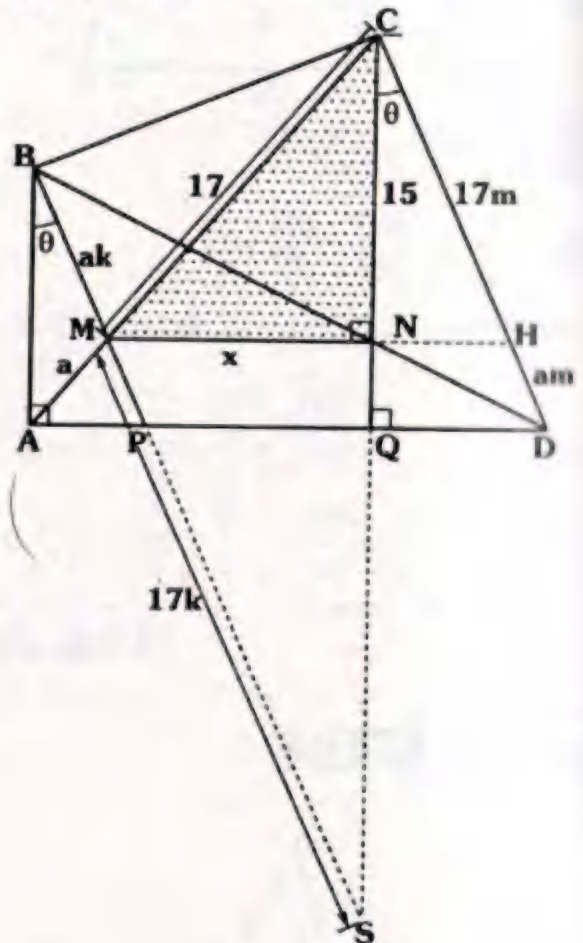
- Es aplicación del teorema (pág. 27)

$$3x = (9)(4)$$

$$\therefore x = 12$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 124**



Piden x.

- $\overline{AB} \parallel \overline{CQ} \Rightarrow BM = ak$  y  $MS = 17k$

- $\overline{BS} \parallel \overline{CD} \Rightarrow CH = 17m$  y  $HD = am$

- Como

$$\frac{AM}{MC} = \frac{DH}{HC} \Rightarrow \overline{MH} \parallel \overline{AD}$$

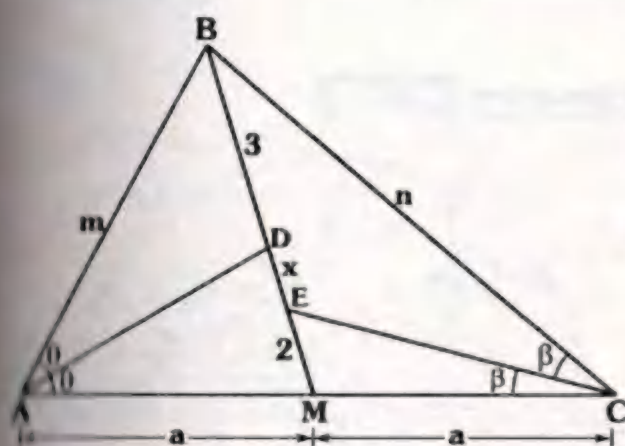
$$\Rightarrow m\angle MNC = 90^\circ$$

En  $\triangle MNC$ :  $x^2 + 15^2 = 17^2$

$\therefore x = 8$

Clave **C**

**RESOLUCIÓN N° 125**



Nos piden  $x$ .

Dato:

$$\frac{m+n}{2a} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{m+n}{a} = 3$$

Usemos el teorema de la bisectriz en los triángulos ABM y MBC

$$\frac{m}{a} = \frac{3}{x+2} \rightarrow \frac{n}{a} = \frac{x+3}{2}$$

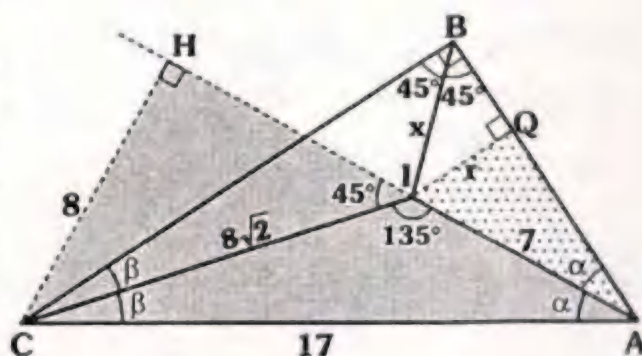
$$\Rightarrow \frac{m+n}{a} = \frac{3}{x+2} + \frac{x+3}{2}$$

$$3 = \frac{3}{x+2} + \frac{x+3}{2}$$

$\therefore x = 1$

Clave **E**

**RESOLUCIÓN N° 126**



Piden  $x$ .

En  $\triangle IQB$ :  $x = r\sqrt{2}$

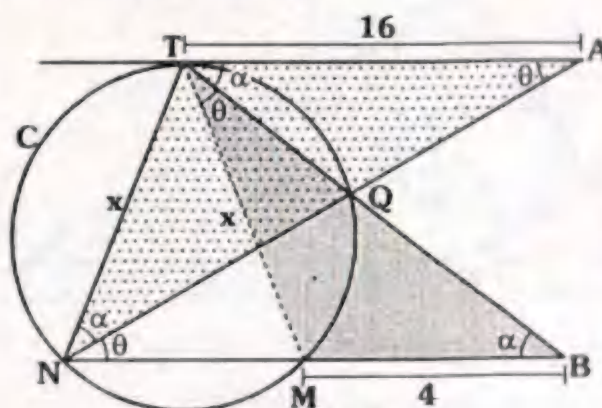
En  $\triangle AQI \sim \triangle AHC$

$$\Rightarrow \frac{r}{7} = \frac{8}{17} \Rightarrow r = \frac{56}{17}$$

$$\therefore x = \frac{56\sqrt{2}}{17}$$

Clave **D**

**RESOLUCIÓN N° 127**



Nos piden  $x$ .

Como  $NM \parallel AT \Rightarrow NT = TM = x$

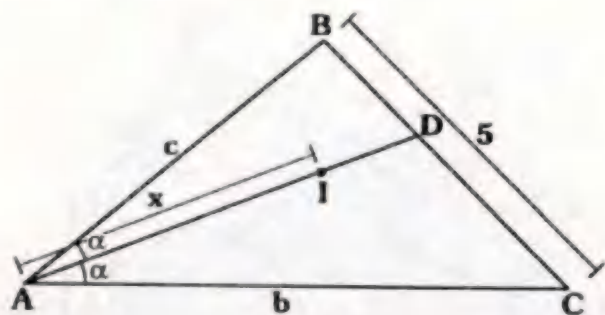
$\triangle NTA \sim \triangle BMT \Rightarrow \frac{x}{16} = \frac{4}{x}$

$\therefore x = 8$

Clave **C**



**RESOLUCIÓN N° 128**



Piden x.

- Dato: Perímetro<sub>(ΔABC)</sub> = 25

$$\Rightarrow b+c=20$$

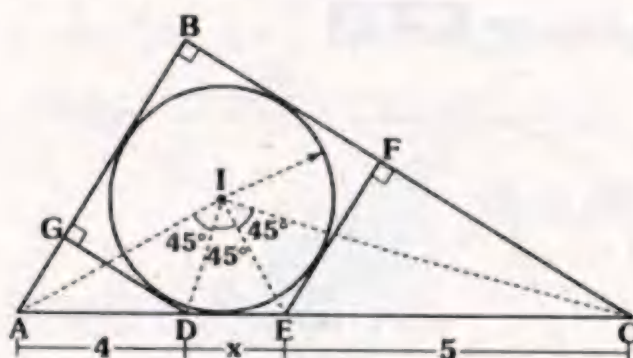
- Por teorema del incentro:

$$\frac{x}{10-x} = \frac{b+c}{5} = 4$$

$$\therefore x = 8$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 129**



Piden x.

- I es incentro del ΔABC

$$\Rightarrow m\angle AIC = 135^\circ$$

- I es excentro de los Δs AGD y EFC.

$$\Rightarrow m\angle AID = \frac{m\angle AGD}{2} = 45^\circ \text{ y}$$

$$m\angle EIC = 45^\circ$$

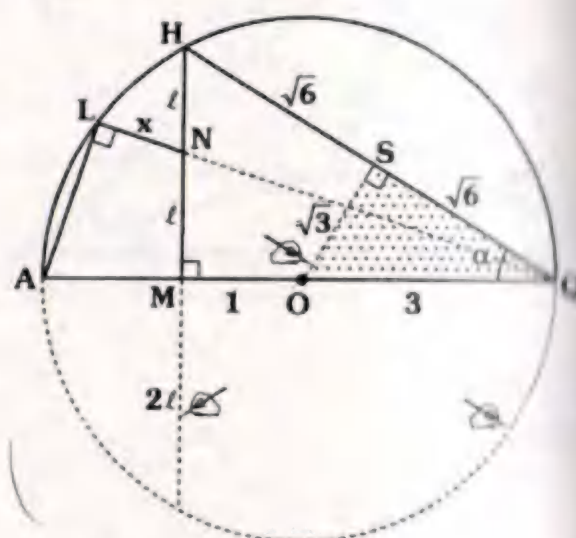
- Verificamos que A, D, E y C forman una cuaterna armónica, entonces:

$$\frac{4}{x} = \frac{9+x}{5} \Rightarrow x^2 + 9x - 20 = 0$$

$$\therefore x = 1,84$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 130**



Piden x.

- ΔHMQ ~ ΔOSQ

$$\Rightarrow \frac{2l}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow l = \sqrt{2}$$

- En ΔHMQ y ΔNMQ:

$$MQ = 4 \text{ y } NQ = 3\sqrt{2}$$

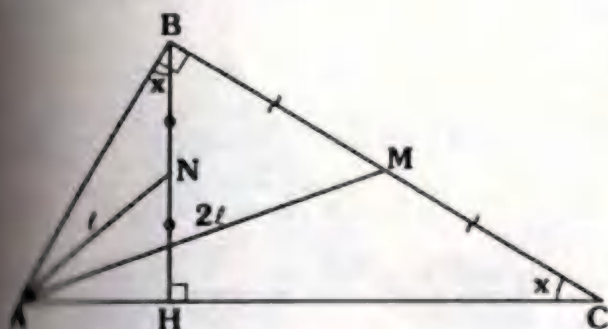
- Como:

$$x(NQ) = l \cdot 3l \Rightarrow x(3\sqrt{2}) = \sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}$$

$$\therefore x = \sqrt{2}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 131**



Piden  $x$ .

- $\triangle AHB \sim \triangle ABC$ ,  $\overline{AN}$  y  $\overline{AM}$  son sus respectivas medianas homólogas

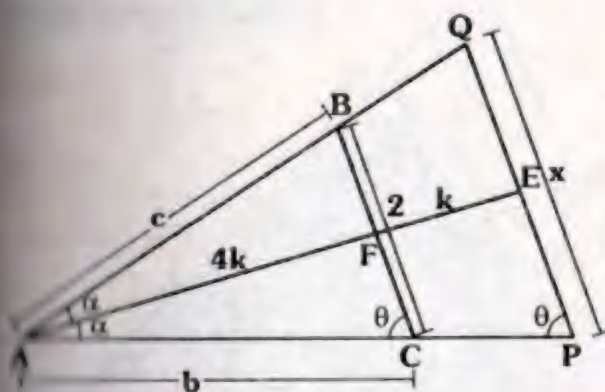
$$\Rightarrow \frac{AC}{2x} = \frac{AB}{x} \Rightarrow AC = 2(AB)$$

- $\triangle ABC$ : notable

$$\therefore x = 30^\circ$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 132**



Piden  $x$ .

- Dato:  $b + c = 10$

$$\triangle AQP \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{AE}{AF} \dots (I)$$

- Por teorema del excentro:

$$\frac{AE}{EF} = \frac{b+c}{2} = 5$$

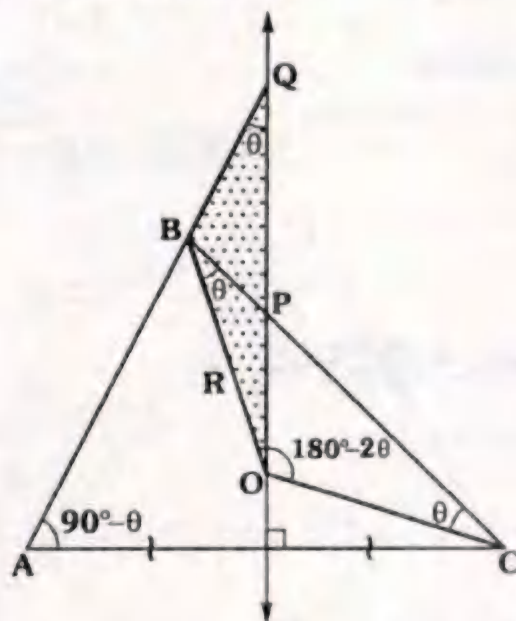
$$\Rightarrow AE = 5k \text{ y } EF = k$$

$$\text{• En (I): } \frac{x}{2} = \frac{5k}{4k}$$

$$\therefore x = \frac{5}{2} = 2,5$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 133**



Piden  $R$ .

- Dato:  $(OP)(OQ) = 36m^2$
- Al completar ángulos verificamos:  
 $m\angle AQO = m\angle OBP = \theta$
- En  $\triangle OBQ$ :

$$R^2 = \frac{(OP)(OQ)}{36m^2}$$

$$\therefore R = 6m$$

**Clave D**



**RESOLUCIÓN N° 134**

Nos piden  $x$ .

- Dato:  $m - n = a$  y  $\ell + t = b$
- Ubicamos  $S$  en  $\overline{BA}$  tal que  $BS = n \Rightarrow AS = a$  y  $Q$  en  $\overrightarrow{AC}$  tal que:  $CQ = t \Rightarrow \ell + t = b$
- Como:

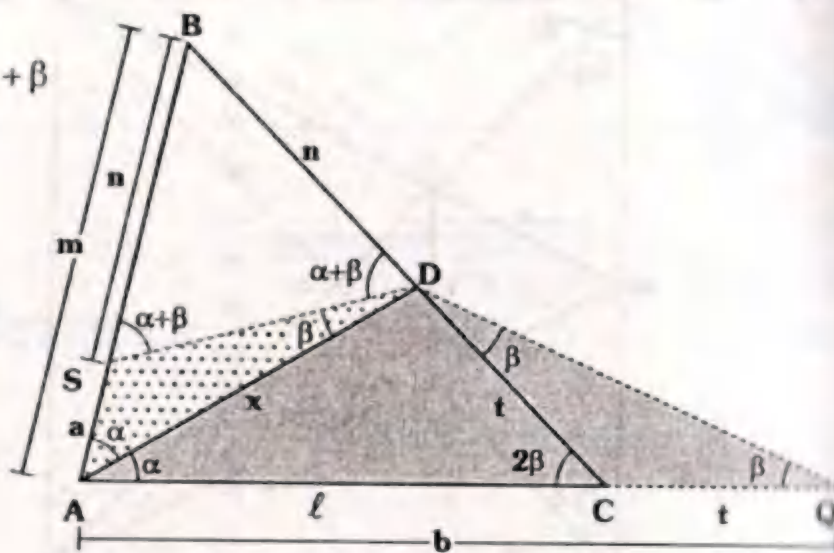
$$m\angle BSD = m\angle BDS = \alpha + \beta$$

$$\Rightarrow m\angle SDA = \beta$$

- $\triangle ASD \sim \triangle ADQ$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{b}{x}$$

$$\therefore x = \sqrt{ab}$$



**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 135**

Nos piden  $x$ .

- Como  $\overline{ET} \perp \overline{MD}$  y  $MT = TD$

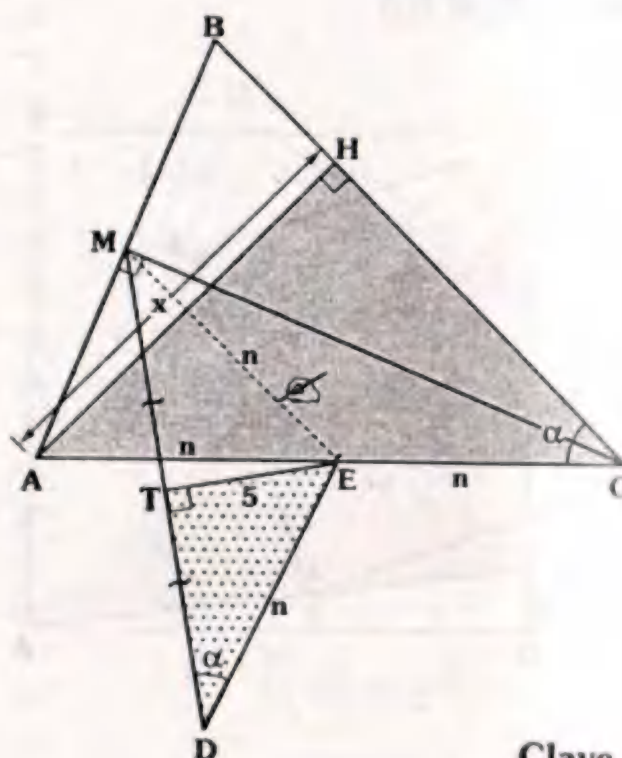
$$\Rightarrow EM = ED = n$$

- En el  $\triangle AMC$ :  $\overline{ME}$  es mediana.

- $\triangle DTE \sim \triangle AHC$

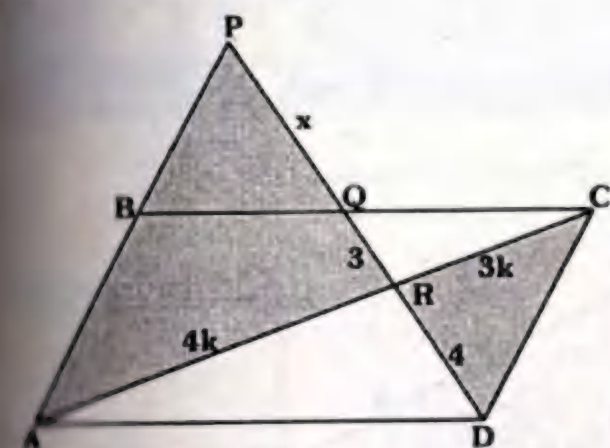
$$\Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{2n}{n}$$

$$\therefore x = 10$$



**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 136**



Piden  $x$ .

Como:

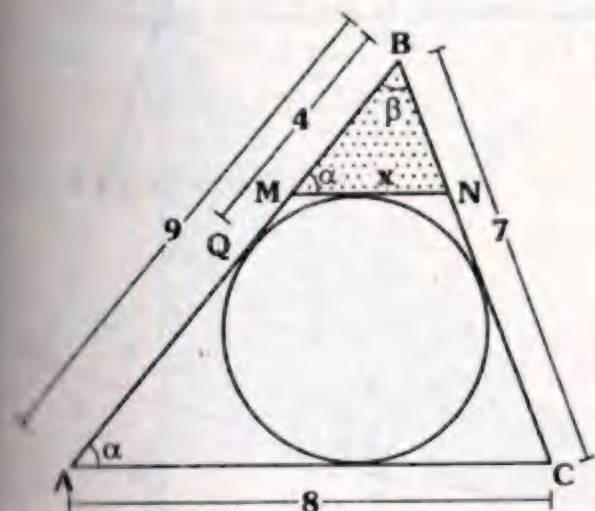
$$\overline{QC} // \overline{AD} \Rightarrow AR = 4k \text{ y } RC = 3k$$

$$\overline{AP} // \overline{DC} \Rightarrow \frac{x+3}{4} = \frac{4k}{3k}$$

$$\therefore x = \frac{7}{3}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 137**



Nos piden  $x$ .

Como  $\triangle MBN \sim \triangle ABC$ , vamos a comparar elementos homólogos (en este

caso razón de semiperímetros).

$$\frac{x}{8} = \frac{P_{\triangle MBN}}{P_{\triangle ABC}} \quad \dots (I)$$

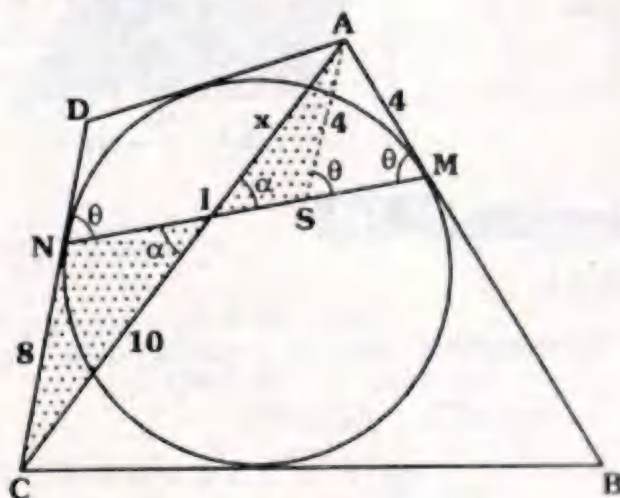
- $P_{\triangle ABC}$ : Semiperímetro del  $\triangle ABC$
- Por propiedad  $P_{\triangle MBN} = BQ = \frac{P_{\triangle ABC}}{2} - 8$   
 $\Rightarrow P_{\triangle MBN} = 4$

$$\text{En (I):} \quad \frac{x}{8} = \frac{4}{12}$$

$$\therefore x = \frac{8}{3}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 138**



Piden  $x$ .

- Notemos que  $m\angle DNM = m\angle NMA$
- Se traza  $\overline{AS} // \overline{DC} \Rightarrow \triangle SAM$  es isósceles con  $AS = AM = 4$
- $\triangle CNI \sim \triangle ASI \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{4}{8}$

$$\therefore x = 5$$

**Clave E**



**RESOLUCIÓN N° 139**

Piden x.

- Como  $AN=NM \Rightarrow \angle YMN \equiv \angle SAN$ ,  $\overline{AE}$  y  $\overline{MF}$  son bisectrices.

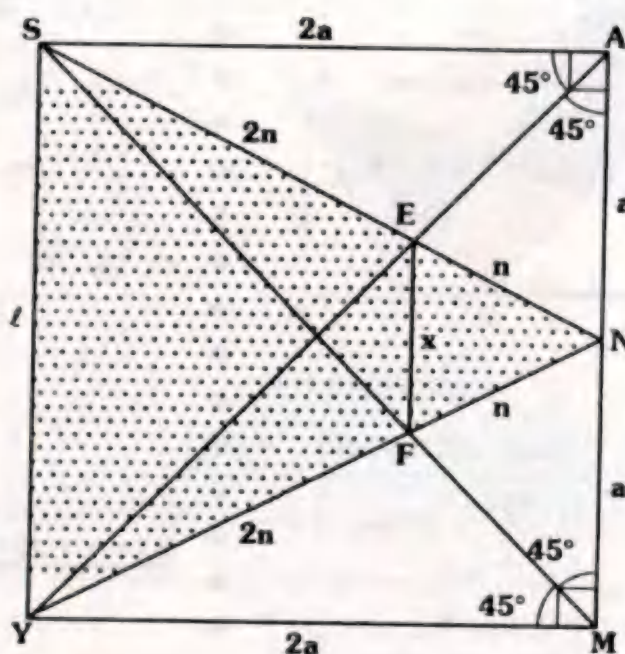
$$\Rightarrow \frac{YF}{FN} = \frac{SE}{EN}$$


$$\Rightarrow \overline{EF} // \overline{SY}$$

- $\Delta ENF \sim \Delta SNY$

$$\Rightarrow \frac{x}{l} = \frac{n}{3n}$$

$$\therefore x = \frac{\ell}{3}$$



**Clave** 

**RESOLUCIÓN N° 140**

Piden x.

- Al completar ángulos, notamos que

$$m_{\angle ACF} = m_{\angle DCM}$$

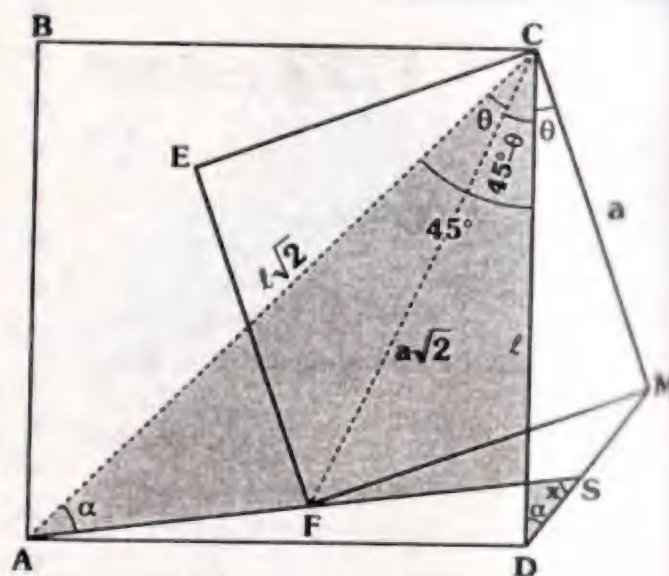
- Como  $\frac{AC}{CF} = \frac{DC}{CM} \Rightarrow \triangle ACF \sim \triangle DCM$

- Luego  $m_{\chi\text{CAF}} = m_{\chi\text{CDM}} = \alpha$

- En la región sombreada:

$$x + \alpha = 45^\circ + \alpha$$

$$\therefore x = 45^\circ$$

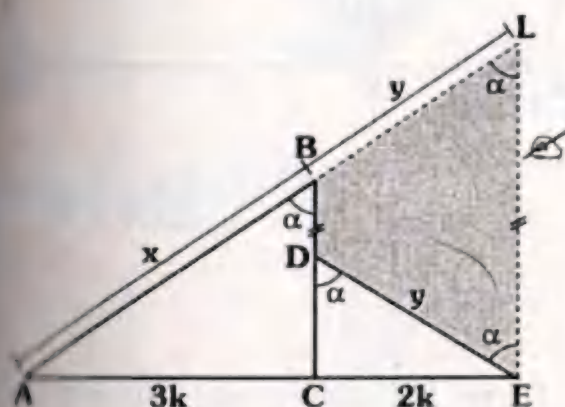


**Clave** **(b)**

# Solucionario

## Ciclo Semestral

### RESOLUCIÓN N° 141



Nos piden  $\frac{x}{y}$

- Se prolonga  $\overline{AB}$  y se ubica  $L$ , tal que:  
 $\overline{CB} \parallel \overline{EL} \Rightarrow DBLE$  es un trapecio isósceles

$$\Rightarrow DE = BL = y$$

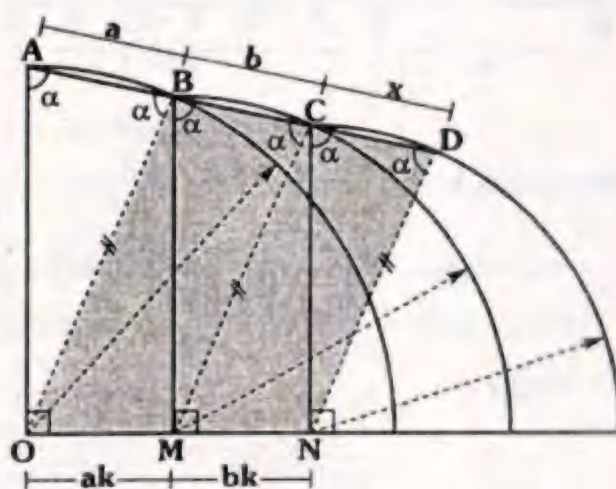
- Por teorema de Tales.

$$\frac{x}{y} = \frac{3k}{2k}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{3}{2}$$

Clave **B**

### RESOLUCIÓN N° 142



Nos piden  $x$ .

- Como  $\overline{OA} \parallel \overline{MB} \parallel \overline{NC}$   
 $\Rightarrow OM = ak$  y  $MN = bk$
- También:  $\overline{OB} \parallel \overline{MC} \parallel \overline{ND}$

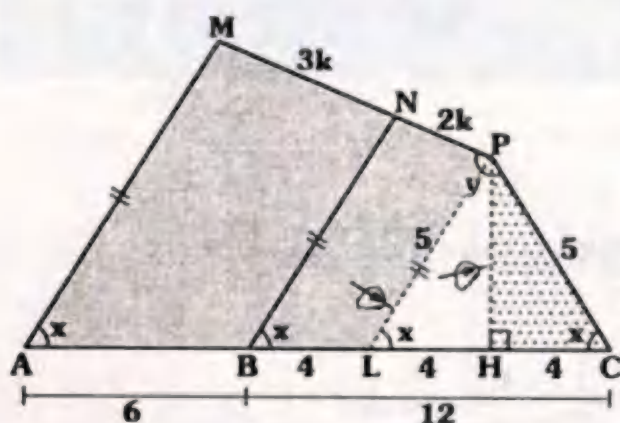
$$\Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{bk}{ak}$$

$$\therefore x = \frac{b^2}{a}$$

Clave **A**



**RESOLUCIÓN N° 143**



Nos piden  $x$ .

- Por dato  $AMNB$  es un trapecio y  $x+y > 180^\circ \Rightarrow \overline{AC}$  y  $\overline{MP}$  son secantes, luego:

$$\overline{AM} // \overline{BN}$$

- Se traza  $\overline{PL} // \overline{NB} \Rightarrow$  por teorema de Tales:

$$\frac{MN}{NP} = \frac{AB}{BL} \Rightarrow BL = 4$$

- $\triangle LPC$ : isósceles  
( $LP = PC = 5$  y  $LC = 8$ )

- Se traza:

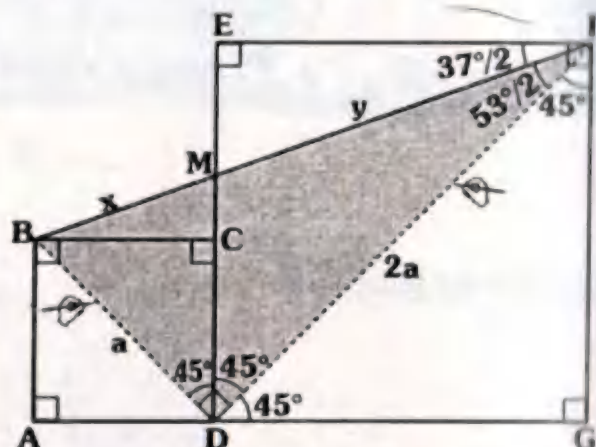
$$\overline{PH} \perp \overline{LC} \Rightarrow LH = HC = 4$$

- $\triangle PHC$ : notable

$$\therefore x = 37^\circ$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 144**



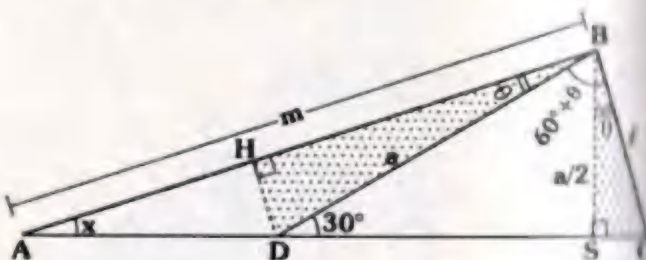
Nos piden  $x/y$ .

- Notemos que  $m\angle BDF = 90^\circ$  y  $m\angle BFD = \frac{53^\circ}{2}$
- Como  $DF = 2(BD)$ , por teorema de la bisectriz interior:

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 145**



Nos piden  $x$

- Dato:  $a^2 = m\ell$  ... (I)
- $\triangle DSB$ : notable de  $30^\circ \Rightarrow BS = \frac{a}{2}$
- $\triangle DHB \sim \triangle CSB$ :

$$\Rightarrow \frac{a}{BH} = \frac{\ell}{(a/2)} \Rightarrow 2a^2 = \ell(BH) \dots (II)$$

• De (I) y (II):

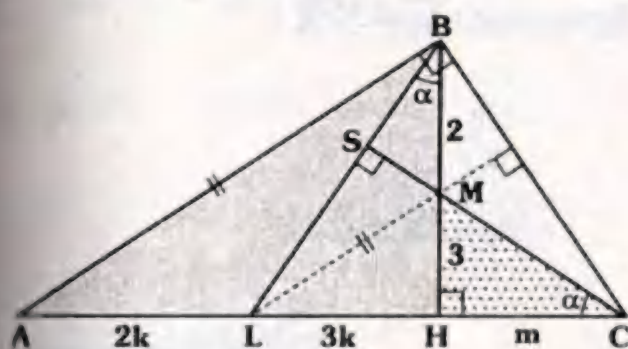
$$BH = \frac{m}{2} \Rightarrow AH = BH \\ \Rightarrow x = \theta$$

• Luego  $AD = DB \Rightarrow m\angle BAD = m\angle ABD$

$$\therefore x = 15^\circ$$

**Clave A**

### RESOLUCIÓN N° 146



Nos piden:  $(AL)(HC)$

• Como "M" es ortocentro del  $\triangle LBC$

$$\Rightarrow \overline{LM} \parallel \overline{BC}, \text{ es decir } \overline{LM} \parallel \overline{AB}$$

• Por teorema de Tales:

$$AL = 2k \text{ y } LH = 3k$$

•  $\triangle MHC \sim \triangle LHB$

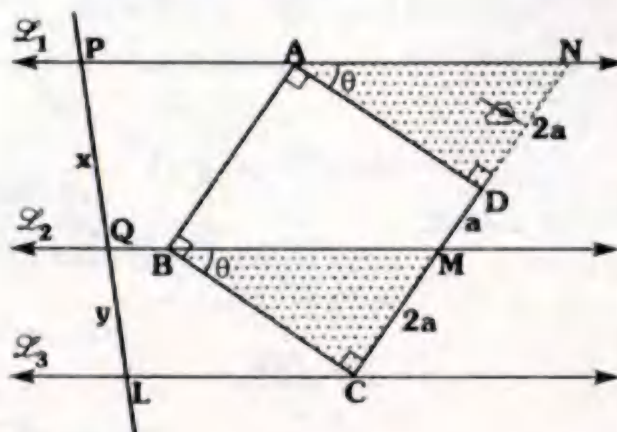
$$\frac{3}{m} = \frac{3k}{5} \Rightarrow mk = 5$$

• Finalmente:  $(AL)(HC) = 2km$

$$\therefore (AL)(HC) = 10$$

**Clave A**

### RESOLUCIÓN N° 147



Nos piden  $x/y$ .

•  $\angle BCM \cong \angle ADN \Rightarrow DN = CM = 2a$

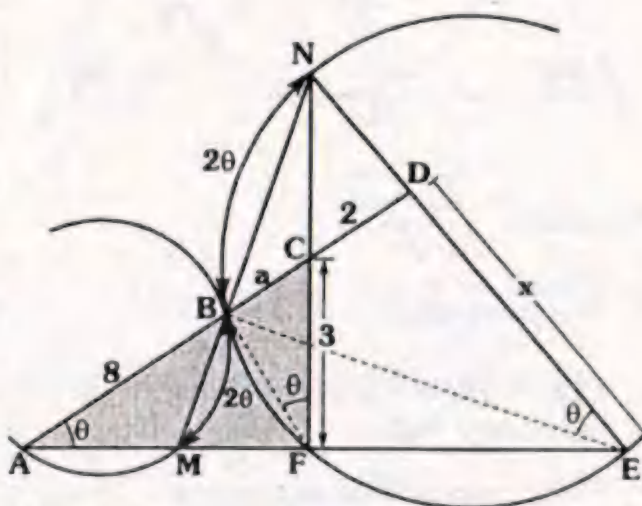
• Por teorema de Tales:

$$\frac{x}{y} = \frac{3a}{2a}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{3}{2}$$

**Clave E**

### RESOLUCIÓN N° 148



Piden  $x$

• Por propiedad de circunferencia:

$$m\widehat{MB} = m\widehat{BN}$$



• Luego:

$$m\angle BAM = m\angle BFC = m\angle BED$$

• En  $\triangle ACF$ : por propiedad de semejanza.

$$3^2 = a(a+8) \Rightarrow a=1$$

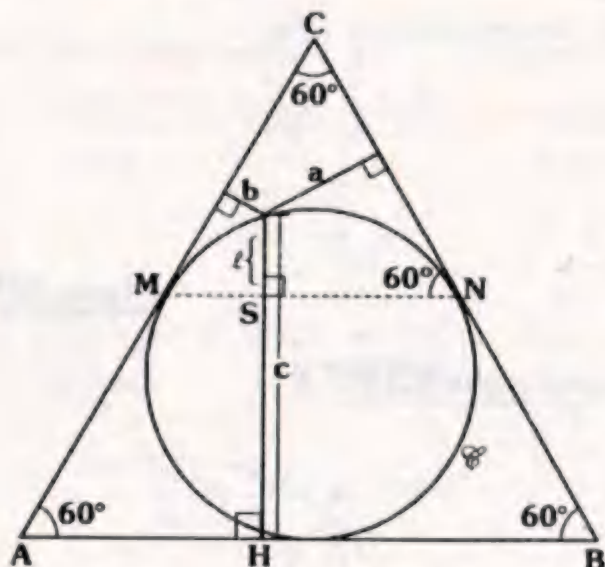
• En  $\triangle ADE$ :

$$x^2 = (3)(11)$$

$$\therefore x = \sqrt{33}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 149**



Nos piden:  $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{c}}$

• Por propiedad:

M y N son puntos medios de  $\overline{AC}$  y  $\overline{CB}$  respectivamente.

• Por propiedad de semejanza:

$$\ell^2 = ab \Rightarrow \ell = \sqrt{ab}$$

• En  $\triangle MCN$  equilátero: " $a + b + \ell$ " es la

altura de dicho triángulo. Como  $\overline{MN}$  es base media  $\Rightarrow SH = a + b + \ell$ .

• Luego:  $c = SH + \ell$

$$c = a + b + 2\ell$$

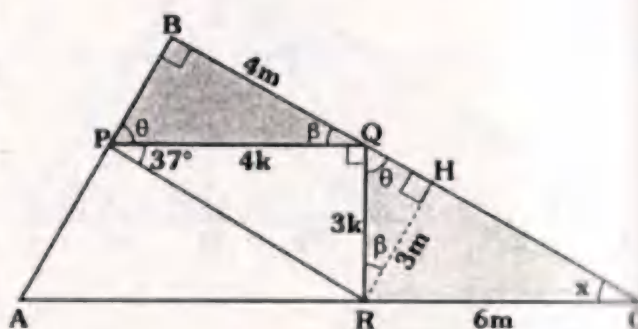
$$c = \underbrace{a + b + 2\sqrt{ab}}$$

$$c = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

$$\therefore \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{c}} = 1$$

**Clave I**

**RESOLUCIÓN N° 150**



Piden:  $x$

Por dato:  $3(BQ) = 2(RC) \begin{cases} BQ = 4m \\ RC = 6m \end{cases}$

•  $\triangle PQR$ : notable de  $37^\circ$

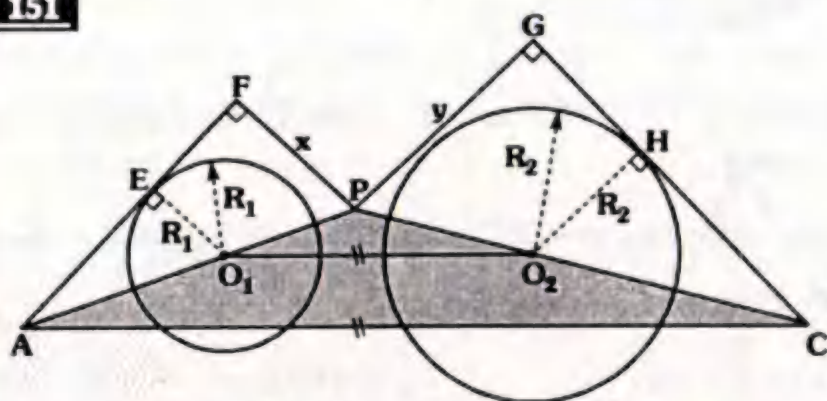
•  $\triangle PBQ \sim \triangle QHR$ : Como  $PQ = 4k$  y  $QR = 3k \Rightarrow RH = 3m$

•  $\triangle RHC$ : notable, pues  $RC = 2(RH)$

$$\therefore x = 30^\circ$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 151**



Nos piden la relación entre  $x$ ,  $y$ ,  $R_1$  y  $R_2$ .

• Como  $\overline{O_1O_2} \parallel \overline{AC} \Rightarrow \frac{AO_1}{AP} = \frac{CO_2}{CP} \dots (1)$

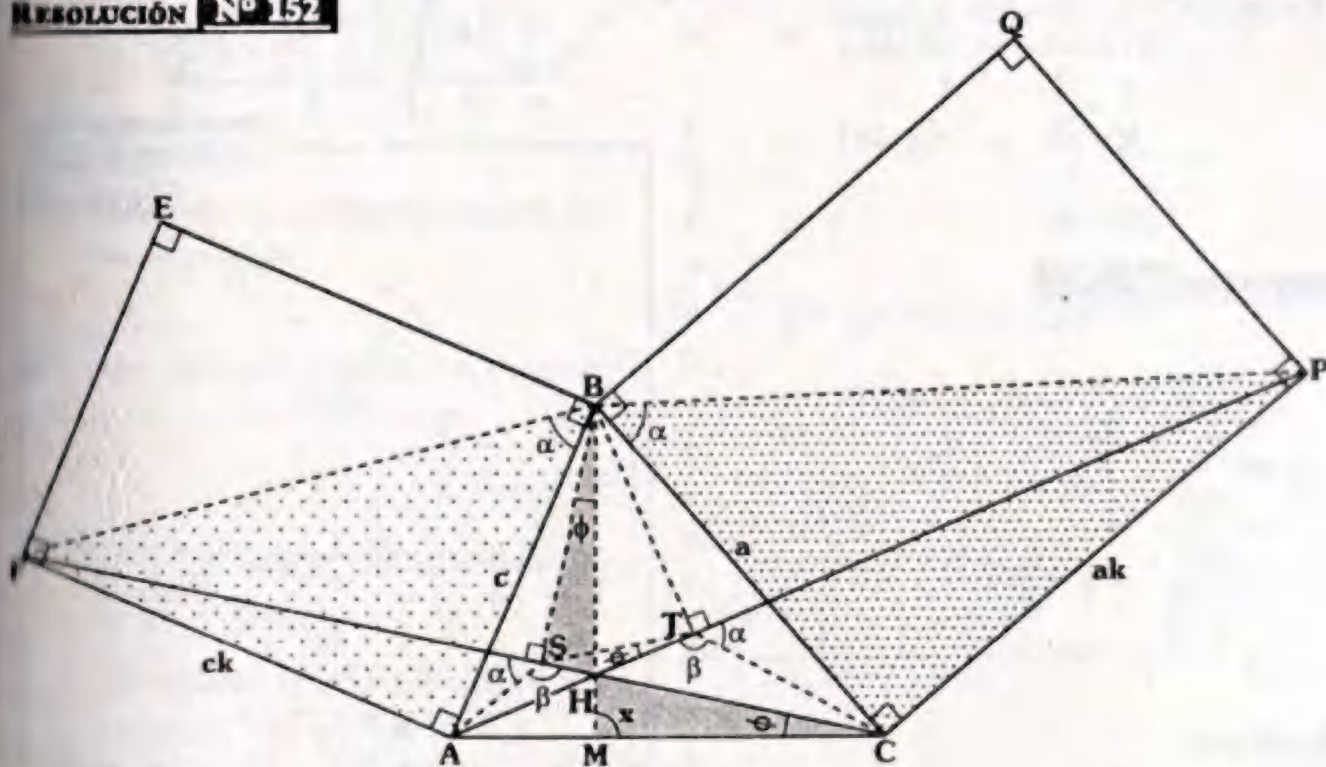
•  $\triangle AEO_1 \sim \triangle AFP \Rightarrow \frac{AO_1}{AP} = \frac{R_1}{x} \dots (2)$

•  $\triangle CHO_2 \sim \triangle CGP \Rightarrow \frac{CO_2}{CP} = \frac{R_2}{y} \dots (3)$

• De (1), (2) y (3):  $\frac{R_1}{x} = \frac{R_2}{y} \therefore yR_1 = xR_2$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 152**





Nos piden  $x$ .

- Como los rectángulos ABEF y BCPQ son semejantes  $\Rightarrow m\angle FBA = m\angle PBC = \alpha$
- Se traza  $\overline{BS} \perp \overline{FC}$  y  $\overline{BT} \perp \overline{AP} \Rightarrow$  los  $\triangle AFBS$  y  $\triangle BPCT$  son inscriptibles  $\Rightarrow m\angle FSA = m\angle PTC = \alpha$
- $\triangle ASTC$  es inscriptible pues  $m\angle ASC = m\angle ATC \Rightarrow m\angle ACH = m\angle ATS = \phi$
- En  $\triangle SBTH$ :  $m\angle HBS = \phi$
- En  $\triangle SBC$ :  $x + \phi = 90^\circ + \phi \quad \therefore x = 90^\circ$

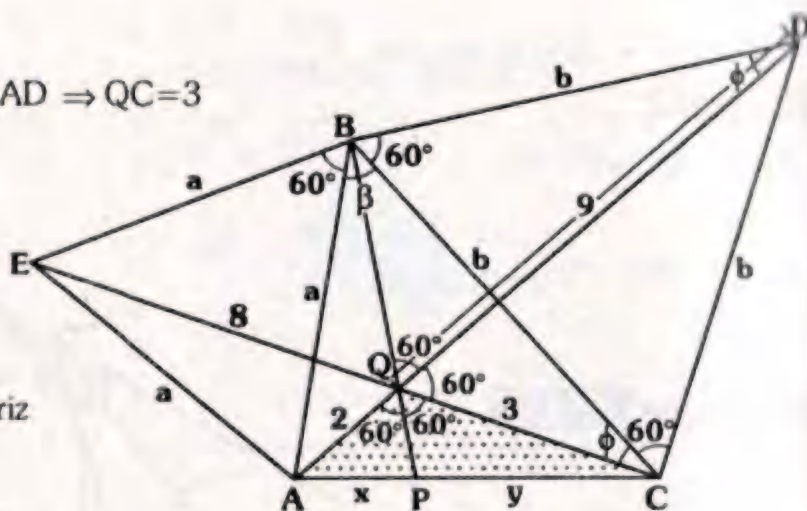
**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 153**

Piden  $x/y$

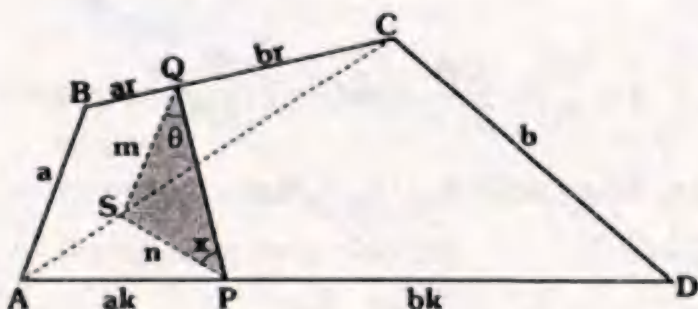
- $\triangle FBC \equiv \triangle ABC$  (LAL)  $\Rightarrow EC = AD \Rightarrow QC = 3$
- También de la congruencia:  
 $m\angle BCE = m\angle BDA = \phi$
- $\triangle CQBD$ : inscriptible  
 $\Rightarrow m\angle CQD = 60^\circ$
- En  $\triangle AQC$ : Teorema de la bisectriz

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{2}{3}$$



**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 154**



Nos piden la medida del ángulo entre  $\overrightarrow{PQ}$  y  $\overrightarrow{CD}$ .

Datos:

- \* La medida del ángulo entre  $\overrightarrow{PQ}$  y  $\overrightarrow{CD}$  es  $\theta$ .
- \*  $\frac{AP}{PD} = \frac{AB}{CD} = \frac{BQ}{QC}$





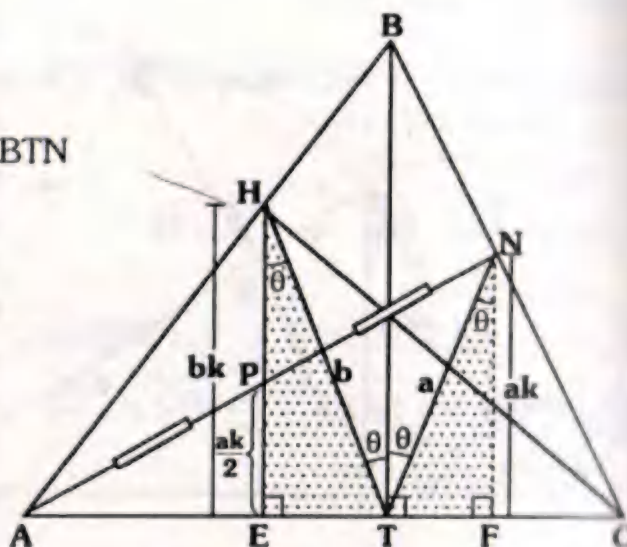
**RESOLUCIÓN N° 156**

Nos piden  $\frac{HP}{PE}$ .

- Por teorema de Blanchet:  $m\angle HTB = m\angle BTN$
- $\triangle HET \sim \triangle NFT \Rightarrow NF = ak$  y  $HE = bk$
- Por teorema de la base media:  $PE = \frac{ak}{2}$

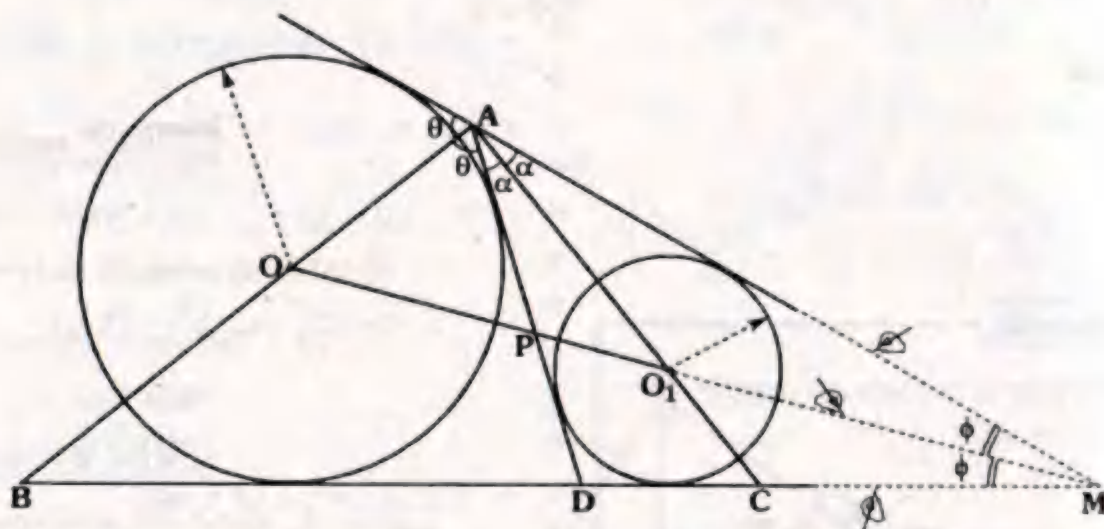
• Finalmente:  $\frac{HP}{PE} = \frac{\left(b - \frac{a}{2}\right)k}{\frac{ak}{2}}$

$$\therefore \frac{HP}{PE} = \frac{2b - a}{a}$$



**Clave II**

**RESOLUCIÓN N° 157**



Nos piden:  $\frac{AP}{PD}$ ; Dato:  $\frac{AO_1}{O_1C} + \frac{AO}{OB} = a$

- Notemos que: M, C, D y B constituyen una cuaterna armónica.
- Por teorema de la bisectriz:

\* En  $\triangle AMD$ :  $\frac{AP}{PD} = \frac{MA}{MD}$  \* En  $\triangle MAC$ :  $\frac{AO_1}{O_1C} = \frac{MA}{MC}$  \* En  $\triangle MAB$ :  $\frac{AO}{OB} = \frac{MA}{MB}$

- Como M, C, D y B es cuaterna armónica, por teorema de Descartes:

$$\frac{1}{MC} + \frac{1}{MB} = \frac{2}{MD} \Rightarrow \frac{MA}{MC} + \frac{MA}{MB} = 2\left(\frac{MA}{MD}\right) \Rightarrow \underbrace{\frac{AO_1}{O_1C} + \frac{AO}{OB}}_a = 2\left(\frac{AP}{PD}\right)$$

$$\therefore \frac{AP}{PD} = \frac{a}{2}$$

Clave **A**

### RESOLUCIÓN N° 158

Nos piden x.

- Como  $\angle NMA \sim \angle CBA$ , sea  $AM=a$  y  $AB=b \Rightarrow AN=ak$  y  $AC=bk$

- Notamos que:

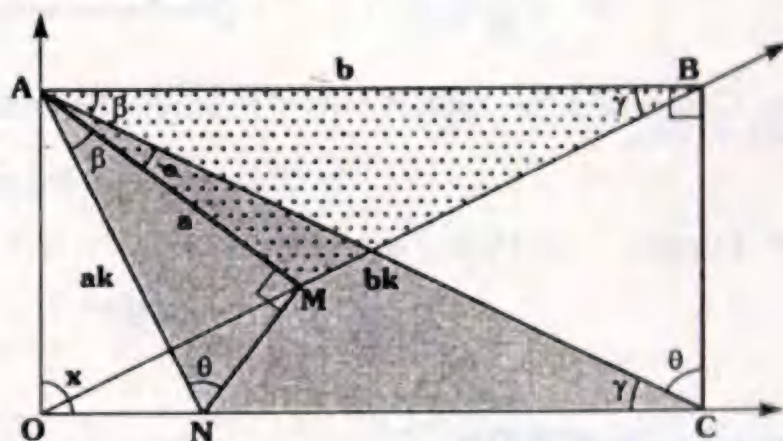
$$\frac{NA}{AC} = \frac{MA}{AB} \text{ y } m\angle NAC = m\angle MAB$$

$$\Rightarrow \triangle AMB \sim \triangle ANC$$

- Luego  $m\angle NCA = m\angle MBA = \gamma$

$$\Rightarrow \triangle OABC \text{ es inscriptible}$$

$$\therefore x = 90^\circ$$



Clave **D**

### RESOLUCIÓN N° 159

Nos piden x.

- Se ubica L en  $\overline{HC}$ , tal que  $AH=HL=x$

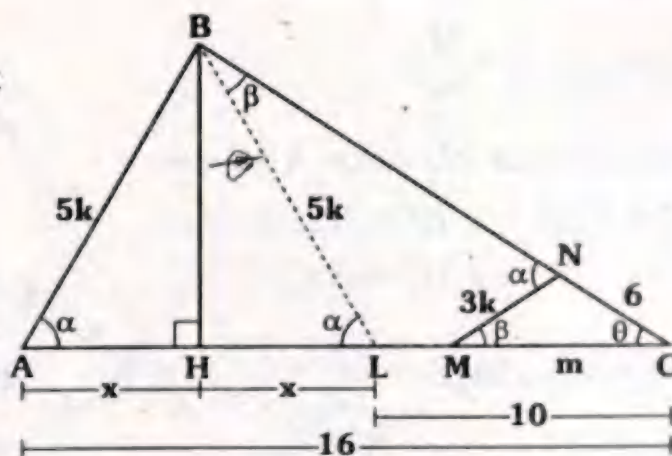
$$\Rightarrow m\angle BAC = m\angle ALB = \alpha \text{ y } BL=5k$$

- $\triangle MNC \sim \triangle BLC$

$$\Rightarrow \frac{LC}{6} = \frac{5k}{3k} \Rightarrow LC = 10$$

- Finalmente:  $2x+10=16$

$$\therefore x = 3$$



Clave **C**



**RESOLUCIÓN N° 160**

Nos piden  $x$ .

Dato:  $m\widehat{AB} + m\widehat{BC} = 180^\circ$

- Del dato se deduce:

$$m\widehat{AB} = m\widehat{CF} \text{ y } m\widehat{AE} = m\widehat{BC}$$

- $\angle EAB \sim \angle BCF \Rightarrow$  como  $\overline{AM}$  y  $\overline{CN}$  son alturas homólogas

$$\Rightarrow \frac{EM}{MB} = \frac{BN}{NF}$$

- Como  $\angle EGB \sim \angle BGF$ , considerando lo anterior:

$\Rightarrow \overline{GM}$  y  $\overline{GN}$  son líneas homólogas

- Luego:  $m\angle MGB = m\angle NGF = \phi$

$$\therefore x = 90^\circ$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 161**

Nos piden  $x/y$ .

- Como  $I$  es incentro del  $\triangle AHB$

$$\Rightarrow m\angle AHI = m\angle IHP = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{AH}{HP}$$

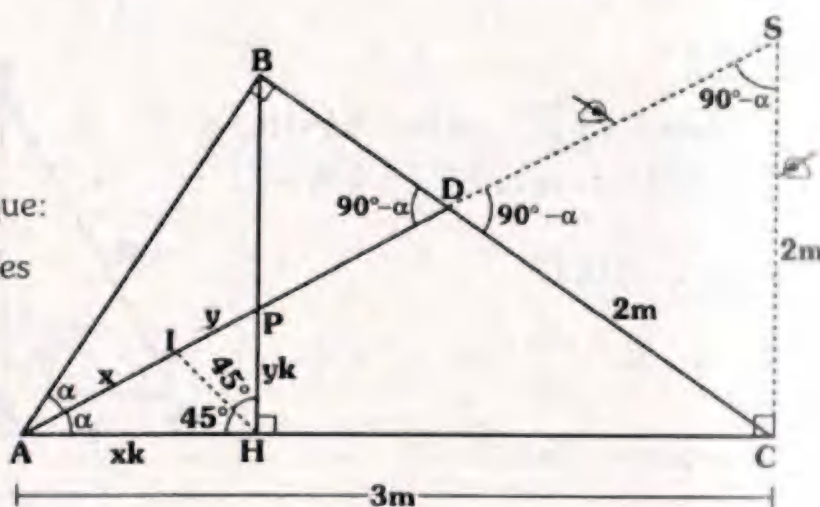
- Se prolonga  $\overline{AD}$  hasta  $S$  tal que:

$$\overline{SC} \perp \overline{CA} \Rightarrow \triangle CDS \text{ es isósceles}$$

$$\Rightarrow DC = CS = 2m$$

- $\triangle AHP \sim \triangle ACS \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{AH}{HP} = \frac{3m}{2m}$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{3}{2}$$



**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 162**

Nos piden  $x$ , en función de  $R$  y  $r$ .

- Por propiedad de circunferencia:

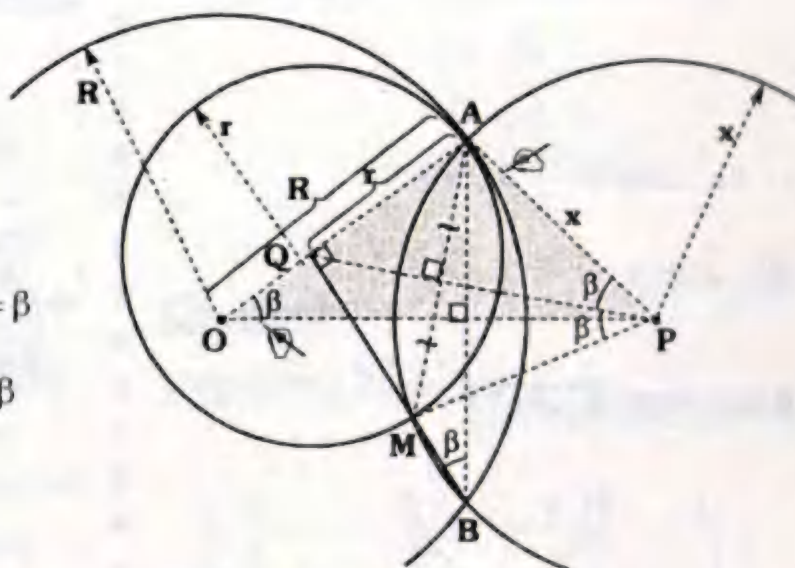
$$\overline{QP} \perp \overline{AM} \text{ y } \overline{AB} \perp \overline{OP}$$

- Sea  $m\angle AOP = \beta \Rightarrow m\angle QBA = \beta$

$$\Rightarrow m\widehat{MA} = 2\beta \Rightarrow m\angle QPA = \beta$$

- En  $\triangle OAP$ :  $x^2 = rR$

$$\therefore x = \sqrt{Rr}$$



**Clave C**

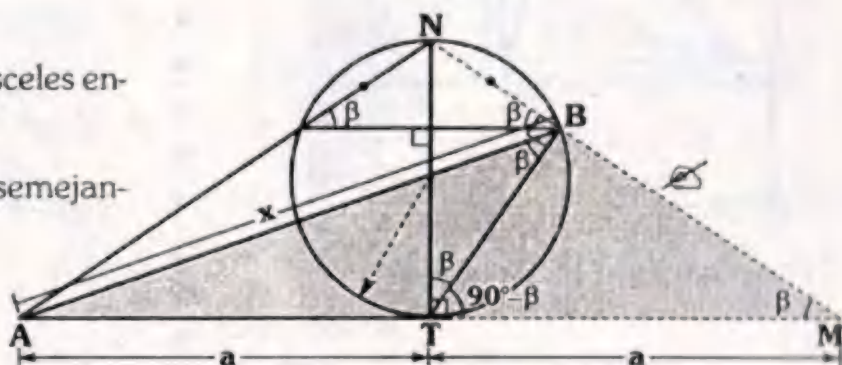
**RESOLUCIÓN N° 163**

Piden  $x$ .

- Notamos que el  $\triangle ANM$  es isósceles entonces  $AT = TM = a$
- En  $\triangle ABM$ , por propiedad de semejanza:

$$x^2 = a(2a)$$

$$\therefore x = a\sqrt{2}$$



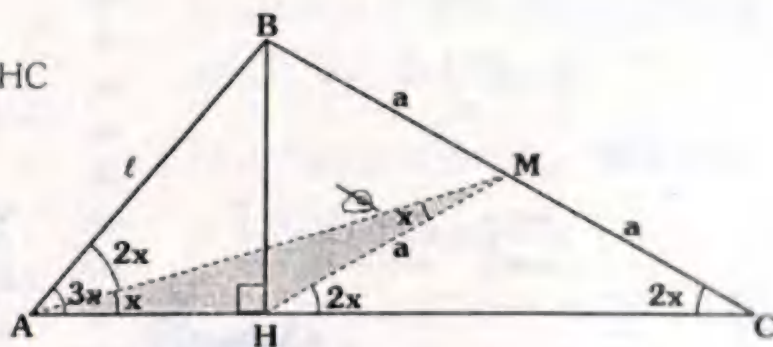
**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 164**

Piden  $x$ .

- Se traza la mediana HM del  $\triangle BHC$   
 $\Rightarrow BM = MC = HM = a$
- $\triangle AHM$ : isósceles
- Notemos que:

$$m\angle ACB = m\angle MAB = 2x$$





⇒ por propiedad de semejanza:

$$\ell^2 = a(2a)$$

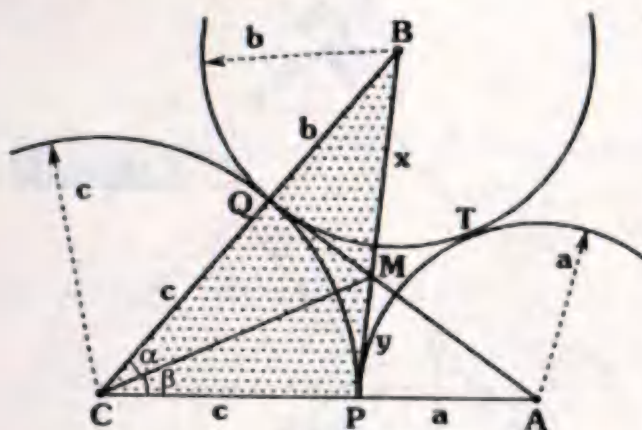
$$\Rightarrow \ell = a\sqrt{2}$$

• En  $\triangle AHB$ :  $3x = 45^\circ$

$$\therefore x = 15^\circ$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 165**



Nos piden  $\frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \beta}$

• Por propiedad de semejanza:

$$\frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \beta} = \frac{xc}{y(b+c)} \quad \dots(I)$$

• En  $\triangle PBC$ : Teorema de Menelao ( $\overleftrightarrow{QMA}$  es la recta secante):

$$cxa = by(a+c)$$

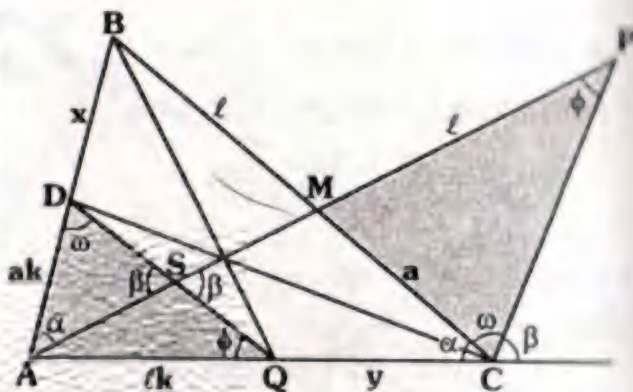
$$\frac{x}{y} = \frac{b(a+c)}{ac} \quad \dots(II)$$

• De (I) y (II):

$$\therefore \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \beta} = \frac{b(a+c)}{a(b+c)}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 166**



Nos piden  $x/y$

• Sea  $m\angle MCP = \omega$ , como  $\alpha + \omega + \beta = 180^\circ$

$$\Rightarrow m\angle ADQ = \omega$$

• Como  $\triangle QSPC$  es inscriptible

$$\Rightarrow m\angle SPC = m\angle SQA$$

•  $\triangle MCP \sim \triangle ADQ$

$$AD = ak \text{ y } AQ = \ell k$$

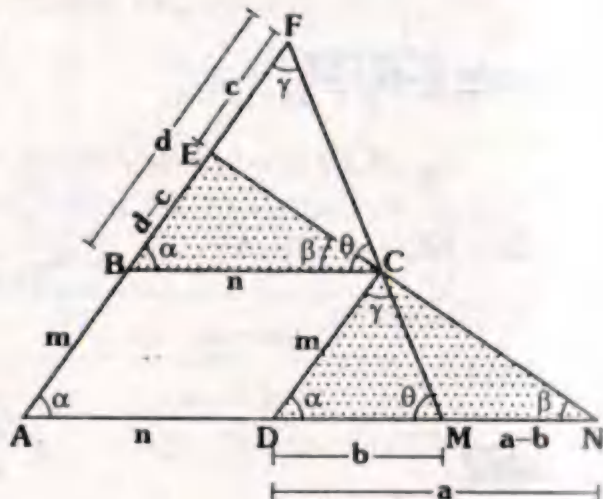
• En  $\triangle ABC$ , por teorema de Ceva:

$$x(\ell k)(a) = y(ak)(\ell)$$

$$\therefore \frac{x}{y} = 1$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 167**



Nos piden la relación entre "a, b, c y d"

•  $\triangle BEC \sim \triangle DCN$

$$\frac{d-c}{m} = \frac{n}{a} \Rightarrow a(d-c) = mn \quad \dots(I)$$

•  $\triangle BFC \sim \triangle DCM$

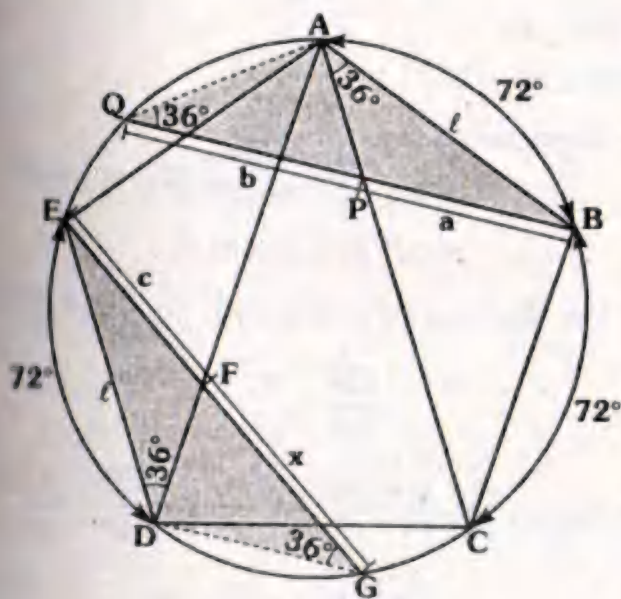
$$\frac{d}{m} = \frac{n}{b} \Rightarrow bd = mn \quad \dots(II)$$

De (I) y (II):

$$\therefore a(d-c) = bd$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 168**



Nos piden x.

• Sea "l" la longitud del lado del pentágono regular ABCDE.

• En  $\triangle QAB$ :  $l^2 = a(a+b) \quad \dots(I)$

• En  $\triangle DEG$ :  $l^2 = c(c+x) \quad \dots(II)$

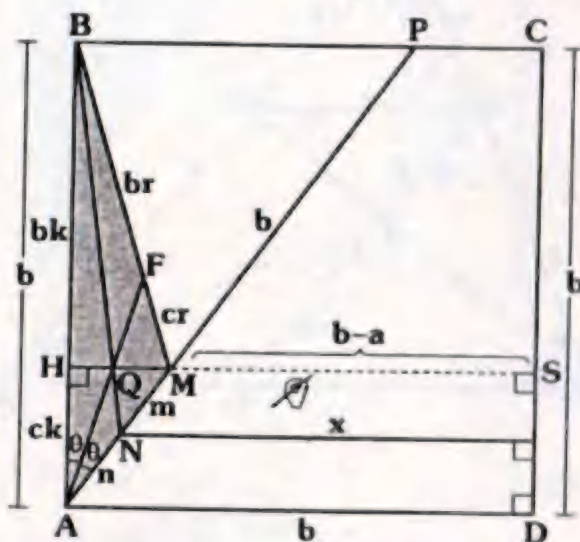
• De (I) y (II):

$$c(c+x) = a(a+b)$$

$$\therefore x = \frac{a^2 + ab - c^2}{c}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 169**



Nos piden x.

Datos:

$$MH=a \Rightarrow MS=b-a$$

• Sea:  $AM=c \Rightarrow AH=ck$  y  $HB=bk$

• Por teorema de la bisectriz en el  $\triangle AMB$ :

$$BF=br \text{ y } FM=cr$$

• En el  $\triangle AMB$ , teorema de Ceva:

$$m(br)(ck) = n(cr)(bk) \Rightarrow m=n$$

• Finalmente, en el trapecio AMSD, por base media:

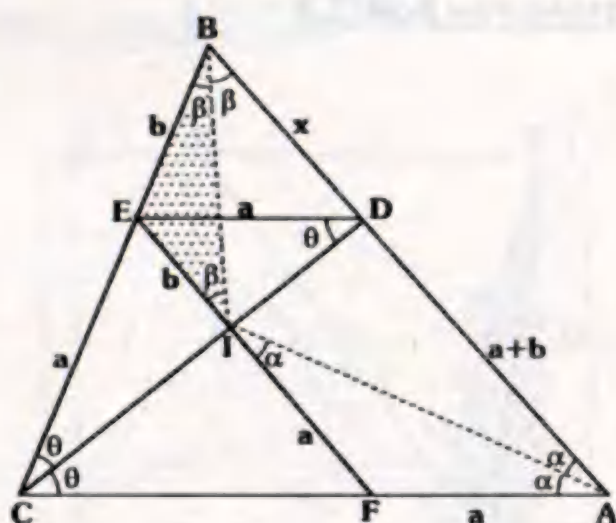


$$x = \frac{b+b-a}{2}$$

$$\therefore x = \frac{2b-a}{2}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 170**



Piden x.

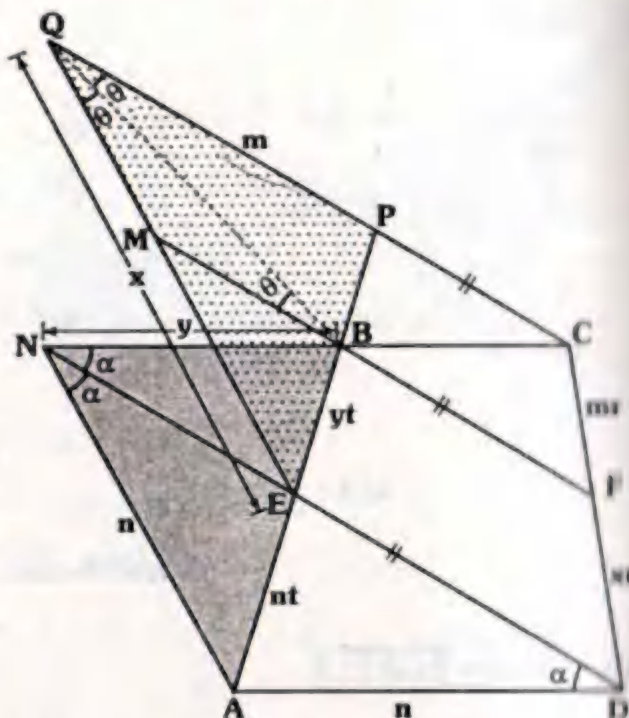
- Como I es incentro  $\Rightarrow \overline{CI}$ ,  $\overline{AI}$  y  $\overline{BI}$  son bisectrices.
- $\triangle CED$ : isósceles  $\Rightarrow CE = ED = a$
- $\triangle FIA$ : isósceles  $\Rightarrow AF = FI = a$
- $\triangle IEB$ : isósceles  $\Rightarrow EB = EI = b$
- Luego:  $FE = AD = a + b$
- Por teorema de Tales:

$$\frac{x}{a+b} = \frac{b}{a}$$

$$\therefore x = \frac{b}{a}(a+b)$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 171**



Piden:  $xy$ .

Dato:  $mn = k$

- Verificamos rápidamente:

$$m\angle ANE = m\angle ENB \text{ y}$$

$$m\angle EQB = m\angle BQP$$

- Por teorema de la bisectriz, en el  $\triangle EQP$

$$\frac{EB}{BP} = \frac{x}{m}$$

- Como  $\overline{PC} \parallel \overline{BF} \parallel \overline{ED} \Rightarrow \frac{CF}{FD} = \frac{EB}{BP} = \frac{x}{m}$

$$\Rightarrow FD = xr \text{ y } CF = mr$$

- En  $\triangle ANB$ :  $AE = nt$  y  $EB = yt$

- Como  $\overline{AD} \parallel \overline{EF} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \frac{y}{n} = \frac{m}{x}$

$$\Rightarrow xy = mn$$

$$\therefore xy = k$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 172**

Piden  $x+y$ .

- Notamos que  $\overline{CQ}$  es bisectriz interior del  $\triangle BCP$ .

- Sea:  $BC=a$  y  $CP=b$   
 $\Rightarrow BQ=ak$  y  $QP=bk$

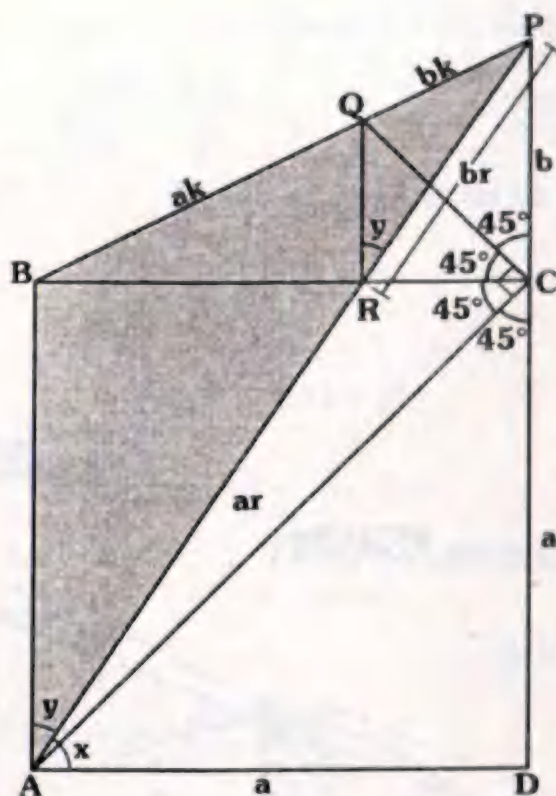
- Por teorema de Tales:

$$PR=br \text{ y } RA=ar$$

- Como:  $\frac{BQ}{QP} = \frac{AR}{RP} \Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{RQ}$

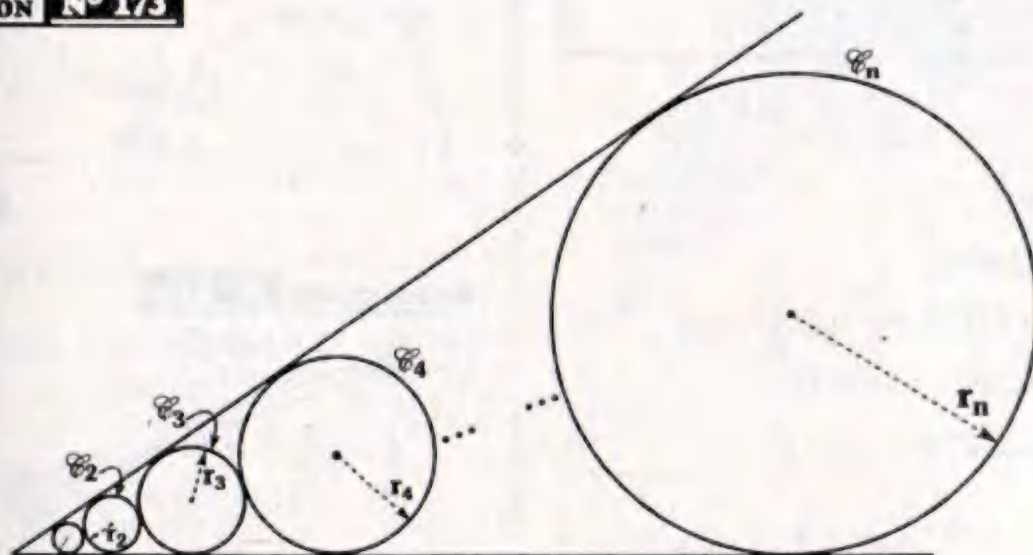
$$\Rightarrow m\angle BAP = y$$

$$\therefore x+y = 90^\circ$$



**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 173**



Nos piden  $r_n$ .

- Analicemos, primero para  $r_1, r_2$  y  $r_3$  por propiedad:

$$(r_2)^2 = r_1 r_3 \Rightarrow r_3 = \frac{(r_2)^2}{r_1}$$



- Ahora para  $r_2, r_3$  y  $r_4$ :

$$(r_3)^2 = r_2 r_4 \Rightarrow r_4 = \frac{(r_3)^2}{r_2} = \frac{(r_2)^3}{(r_1)^2}$$

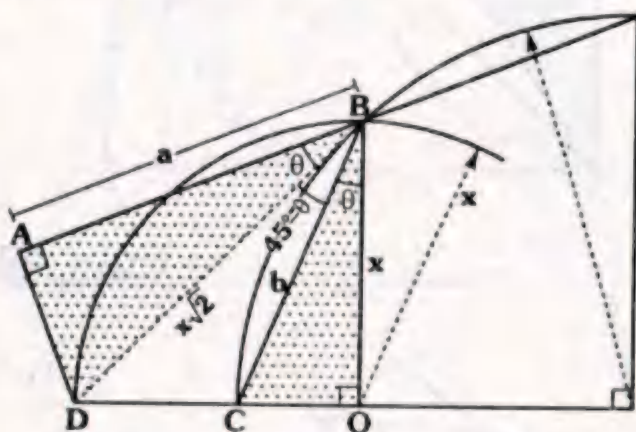
- y así sucesivamente, luego:

$$r_n = \frac{(r_2)^{n-1}}{(r_1)^{n-2}}$$

$$\therefore r_n = (r_1)^{2-n} (r_2)^{n-1}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 174**



Piden  $x$ .

Dato:  $ab = 12$

- Por propiedad:

$$m\angle ABC = m\angle DBO = 45^\circ$$

$$\Rightarrow m\angle ABD = m\angle CBO$$

- Notamos:  $\triangle DAB \sim \triangle COB$

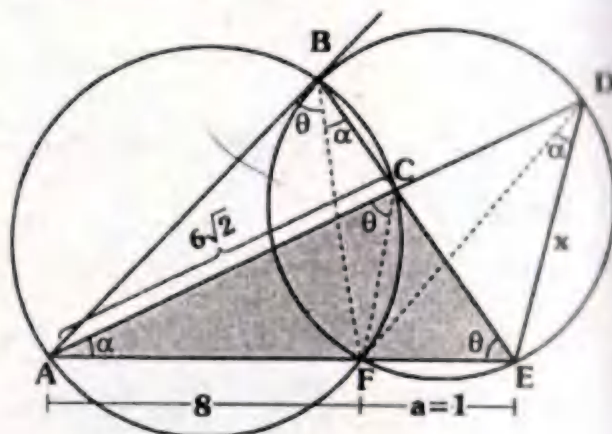
$$\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{b}{x\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x^2 \sqrt{2} = \frac{ab}{12\sqrt{2}}$$

$$\therefore x = 2\sqrt{3}$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 175**



Nos piden  $x$ .

- Primero completamos ángulos:

$$* m\angle AEB = m\angle ABF = m\angle ACF = \theta$$

$$* m\angle FAC = m\angle FBC = m\angle FDE = \alpha$$

- En  $\triangle ACE$ :

$$(6\sqrt{2})^2 = 8(8+a) \rightarrow a = 1$$

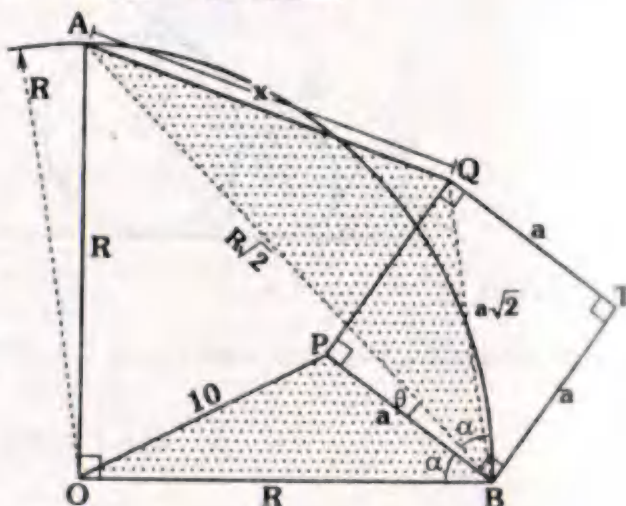
- En  $\triangle ADE$ :

$$x^2 = (1)(9)$$

$$\therefore x = 3$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 176**



Piden x.

• Notemos:

$$m\angle OBA = m\angle PBQ = 45^\circ$$

$$\Rightarrow m\angle OBP = m\angle ABQ = \alpha$$

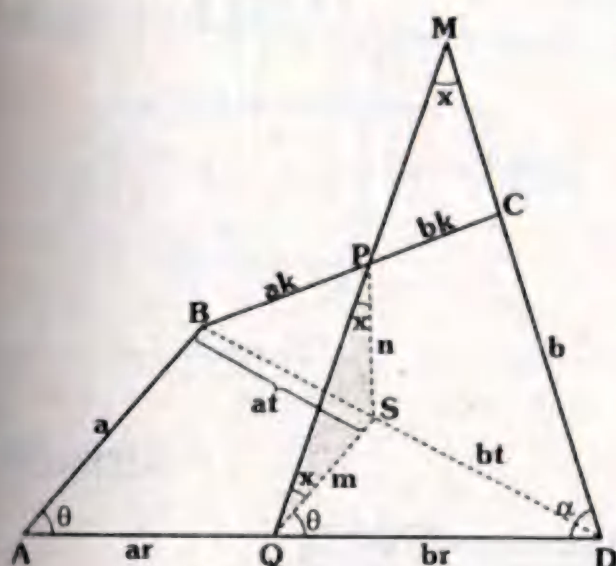
•  $\triangle OBP \sim \triangle ABQ$

$$\Rightarrow x = 10\sqrt{2}$$

$$\therefore x = 14,14$$

**Clave C**

### RESOLUCIÓN N° 177



Piden x; dato:  $\alpha + \theta = 140^\circ$

• Ubiquemos S en  $\overline{BD}$  tal que  $\overline{PS} \parallel \overline{CD}$   
 $\Rightarrow BS = at$  y  $SD = bt$

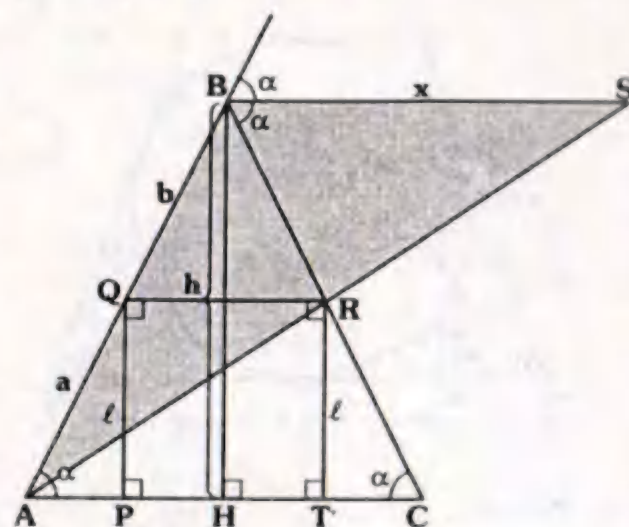
• Como:  $\frac{BS}{SD} = \frac{AQ}{QD} \Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{QS}$

•  $\triangle BPS \sim \triangle BCD \Rightarrow \frac{n}{b} = \frac{ak}{(a+b)k}$   
 $\Rightarrow n = \frac{ab}{a+b}$

•  $\triangle QSD \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{m}{a} = \frac{bk}{(a+b)k}$   
 $\Rightarrow m = \frac{ab}{a+b}$   
 • Como  $m = n \Rightarrow \triangle QSP$ : isósceles  
 $\Rightarrow m\angle PQS = m\angle QPS = x$   
 • En  $\triangle QMD$ :  
 $2x + \frac{\alpha + \theta}{140^\circ} = 180^\circ$   
 $\therefore x = 20^\circ$

**Clave B**

### RESOLUCIÓN N° 178



Piden x.

Dato:  $h = 4$

• Notamos que  $\overline{BS} \parallel \overline{AC}$

•  $\triangle AQR \sim \triangle ABS$

Como  $QR = l \Rightarrow \frac{x}{l} = \frac{a+b}{a}$

•  $\triangle APQ \sim \triangle AHB$ :



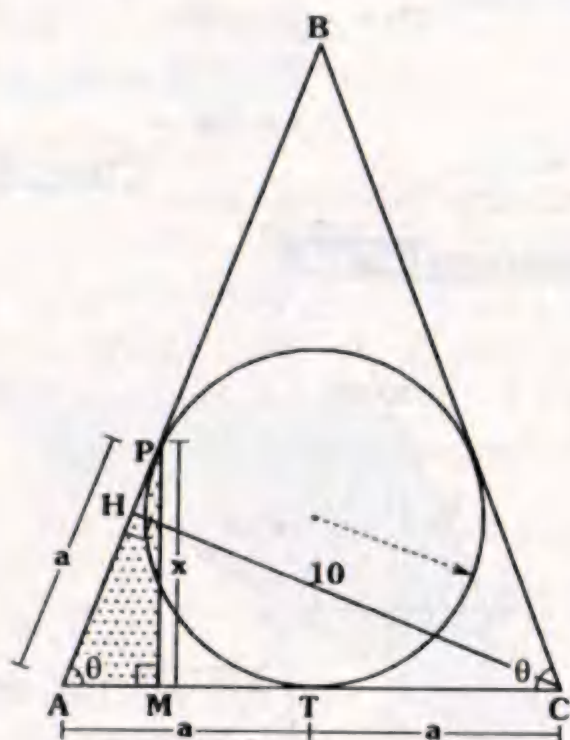
$$\frac{h}{\ell} = \frac{a+b}{a}$$

• Luego:  $x=h$

$$\therefore x=4$$

Clave **C**

**RESOLUCIÓN N° 179**



Nos piden  $x$ .

• Como  $\triangle ABC$  es isósceles  $\Rightarrow AT=TC=a$

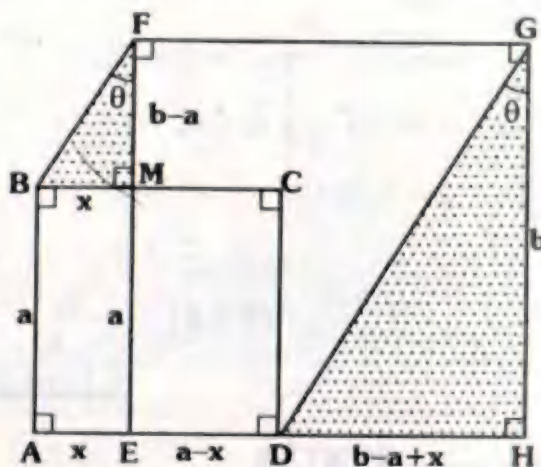
•  $\triangle AMP \sim \triangle AHC$ :

$$\frac{x}{10} = \frac{a}{2a}$$

$$\therefore x=5$$

Clave **C**

**RESOLUCIÓN N° 180**



Piden  $x$ .

• Como  $\overline{BF} \parallel \overline{DG}$

$$\Rightarrow m\angle BFM = m\angle DGH$$

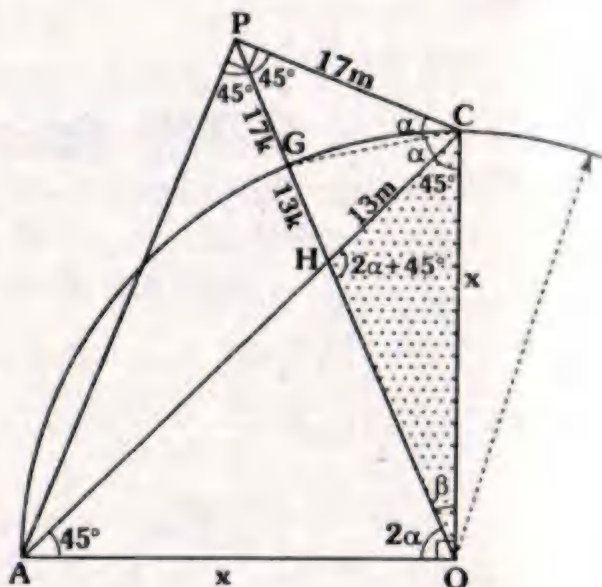
•  $\triangle BMF \sim \triangle DHG$

$$\Rightarrow \frac{x}{b-a+x} = \frac{b-a}{b}$$

$$\therefore x = \frac{(b-a)^2}{a}$$

Clave **A**

**RESOLUCIÓN N° 181**



Piden x.

Dato:  $OP=34$

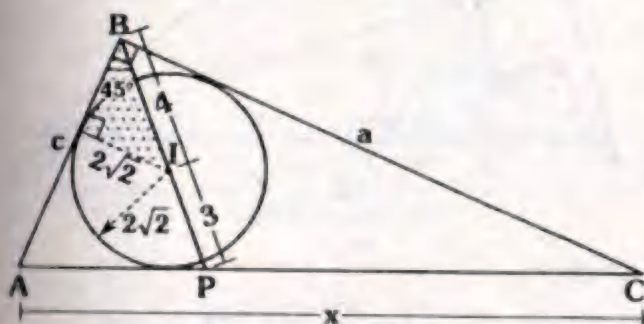
- Sea  $m\angle GCA = \alpha \Rightarrow m\angle AOG = 2\alpha$
- Como  $\triangle APCO$  es inscriptible  
 $\Rightarrow m\angle GCP = \alpha$

$$\triangle HCO \sim \triangle PCO \Rightarrow \frac{x}{34} = \frac{13}{17}$$

$$\therefore x = 26$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 182**



Nos piden x.

- Usemos el teorema del incentro:

$$\frac{a+c}{x} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3(a+c) = 4x \quad \dots(I)$$

- Por teorema de Poncelet:

$$a+c = x + 2(2\sqrt{2}) \quad \dots(II)$$

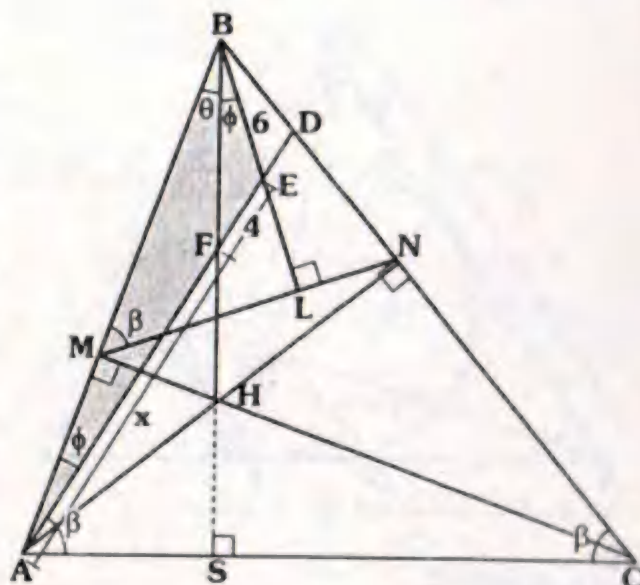
- De (I) y (II):

$$3(x + 4\sqrt{2}) = 4x$$

$$\therefore x = 12\sqrt{2}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 183**



Piden x.

- Como  $DA=DC$

$$\Rightarrow m\angle DAC = m\angle ACD = \beta$$

- $\triangle AMNC$ : inscriptible

$$\Rightarrow m\angle NMB = \beta$$

- Sea  $m\angle DAB = \phi$  y  $m\angle ABH = \theta$

$$\Rightarrow \theta + \phi + \beta = 90^\circ$$

- $\triangle MLB$ :  $m\angle EBS = \phi$

- $\triangle AEB$ :

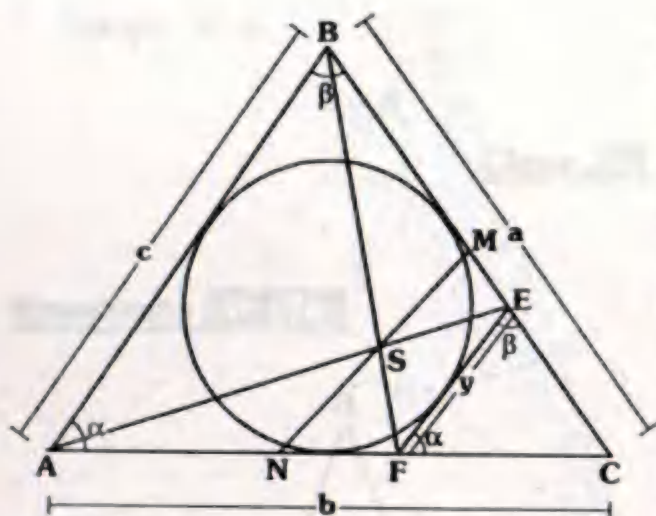
$$6^2 = 4(4+x)$$

$$\therefore x = 5$$

**Clave D**



**RESOLUCIÓN N° 184**



Nos piden MN.

- Por propiedad de semejanza:

$$SN = SM = \frac{cy}{c+y}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{2cy}{c+y} \quad \dots(I)$$

- Como  $\triangle FEC \sim \triangle ABC$

$$\frac{y}{c} = \frac{P_{\triangle FEC}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{CM}{P_{\triangle ABC}} = \frac{P_{\triangle ABC} - c}{P_{\triangle ABC}} = \frac{a+b-c}{a+b+c}$$

Donde  $P_{\triangle ABC}$ : semiperímetro del  $\triangle ABC$

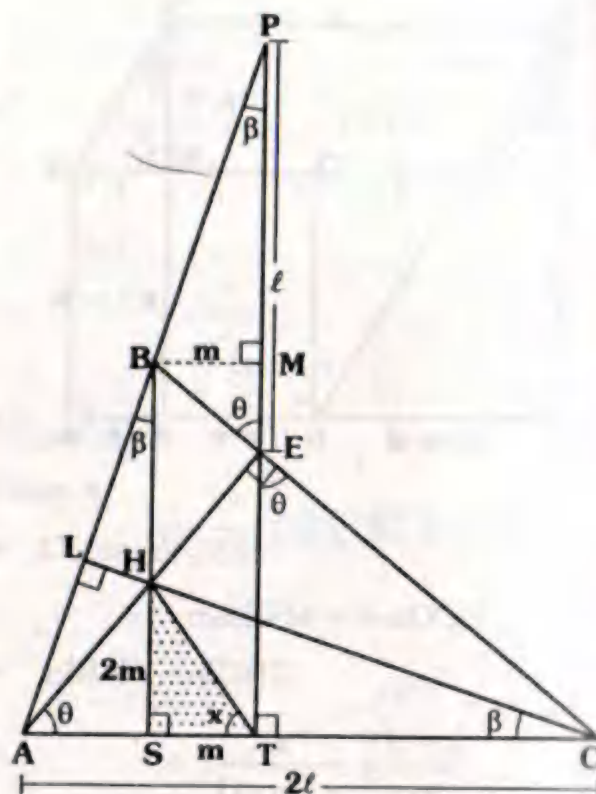
$$\Rightarrow y = \frac{c(a+b-c)}{a+b+c} \quad \dots(II)$$

- De (I) y (II):

$$\therefore MN = \frac{c(a+b-c)}{a+b}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 185**



Piden x.

- Como H es ortocentro del  $\triangle ABC$

$\Rightarrow \overline{CL}, \overline{BS}$  y  $\overline{AE}$  son alturas

- También  $\overline{BS} \parallel \overline{PT}$

- Notemos:

$$m\angle ACH = m\angle SBA = m\angle BPT = \beta$$

$$m\angle HAC = m\angle TEC = m\angle PEB = \theta$$

- $\triangle AHC \sim \triangle EBP \rightarrow HS = 2(BM)$

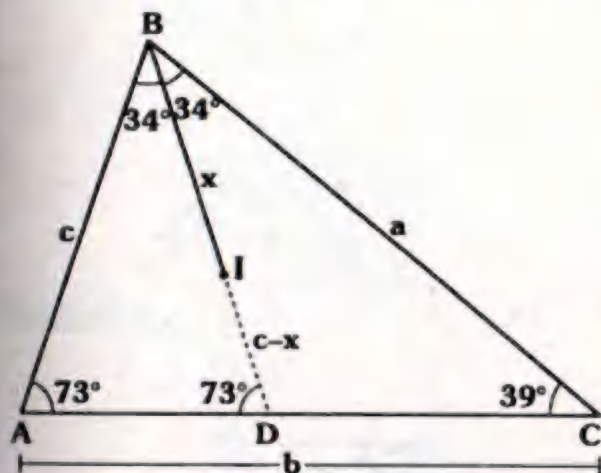
- Finalmente, notemos en el  $\triangle HST$ :

$$HS = 2(ST)$$

$$\therefore x = \frac{127^\circ}{2}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 186**



Piden x.

- Como I es incentro, entonces:

$$m\angle ABI = m\angle IBC = 34^\circ$$

- $\triangle ABD$ : isósceles  $\rightarrow AB = BD = c \rightarrow ID = c - x$

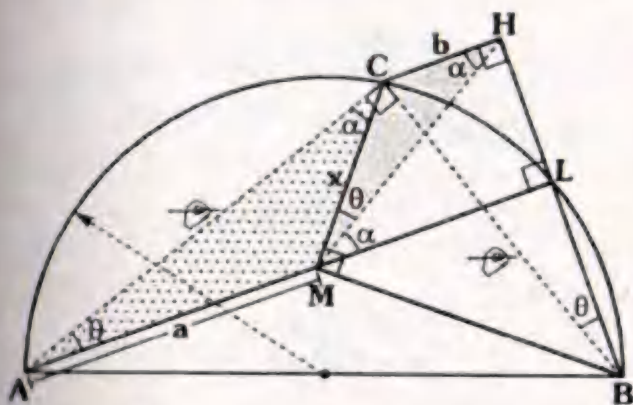
- Por teorema del incentro:

$$\frac{BI}{ID} = \frac{x}{c-x} = \frac{a+c}{b}$$

$$\therefore x = \frac{c(a+c)}{a+c-b}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 187**



Piden x en función de a y b.

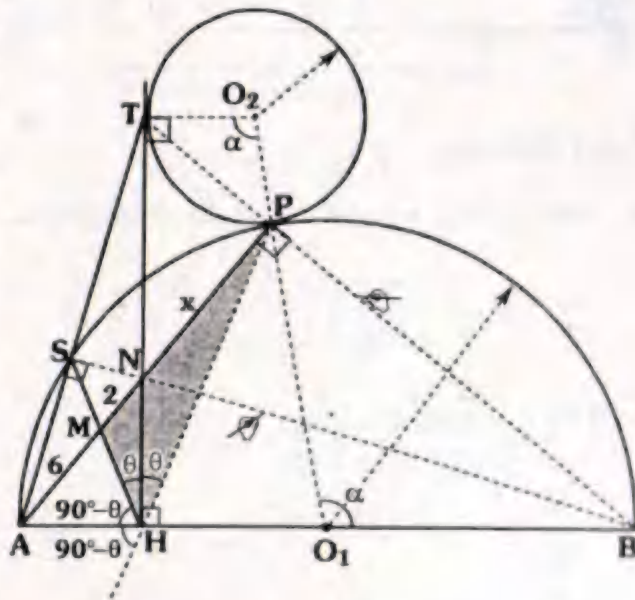
- Complete los ángulos:
- Sea  $m\angle CAM = \theta \Rightarrow m\angle CBH = \theta$
- $\triangle MCHB$ : inscriptible  
 $\Rightarrow m\angle CMH = \theta$
- En  $\triangle AMC$ , por ángulo exterior:  
 $m\angle HML = \alpha$
- Como  $\overline{ML} \parallel \overline{CH} \Rightarrow m\angle CHM = \alpha$
- $\triangle AMC \sim \triangle MCH$

$$\Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{a}{x}$$

$$\therefore x = \sqrt{ab}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 188**



Nos piden x.

- Como  $m\widehat{TP} = m\widehat{PB} \Rightarrow T, P$  y  $B$  colineales.
- N es ortocentro del  $\triangle ATB \Rightarrow B, N$  y  $S$ ; colineales.

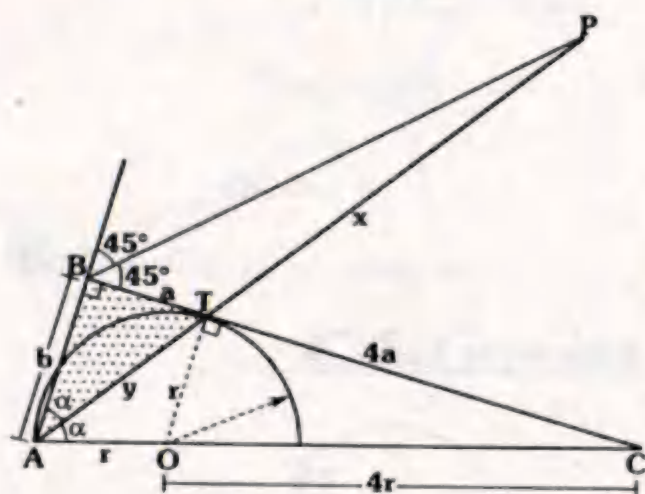


- $\Delta SHP$ : triángulo órtico del  $\Delta ATB$   $\diamond$  • De (I), (II) y (III):  
 $\Rightarrow A, M, N$  y  $P$ : cuaterna armónica.  $\diamond$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{8+x}{6}$$

$$\therefore x = 4$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 189**

Nos piden  $x/y$ .

- En  $\triangle ABT$ , por teorema de la bisectriz:

$$\frac{x}{x+y} = \frac{a}{b} \quad \dots (I)$$

- Por teorema de Tales:

$$\frac{OC}{AO} = 4 \Rightarrow OC = 4r \Rightarrow \text{en } \triangle OTC:$$


$$a = \frac{r\sqrt{15}}{4} \quad \dots(\text{II})$$

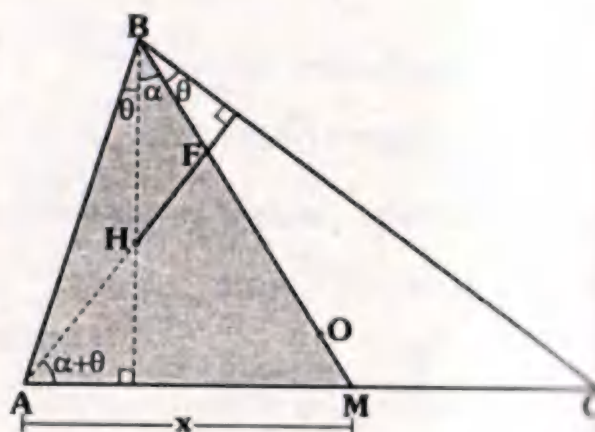
- Por teorema de la bisectriz en  $\triangle ABT$ :

$$b = \frac{5r}{4} \quad \dots(III)$$

$$\frac{x}{x+y} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{15}}{5 - \sqrt{15}}$$

**Clave** 

**RESOLUCIÓN N° 190**

Nos piden x.

- Dato:  $(BM)(FM)=12$
- Por teorema de puntos notables:

$$m\angle ABH = m\angle OBC$$

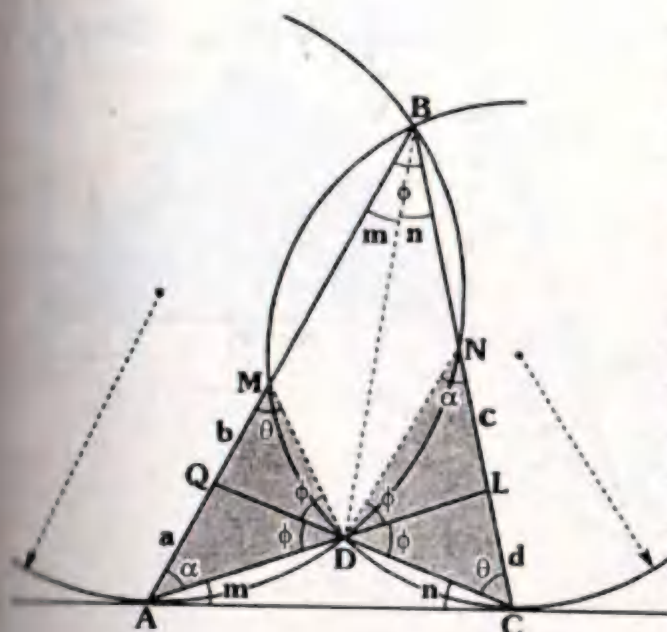
- En  $\Delta ABM$ :

$$x^2 = \underbrace{(FM)(BM)}_{12}$$

$$\therefore x = 2\sqrt{3}$$

**Clave** D

**RESOLUCIÓN N° 191**



Piden la relación entre "a, b, c y d".

- Completemos ángulos:

$$m\angle DAB = m\angle DNC = \alpha$$

$$m\angle DCB = m\angle DMA = \theta$$

- Notemos que:

$$m + n = \phi$$

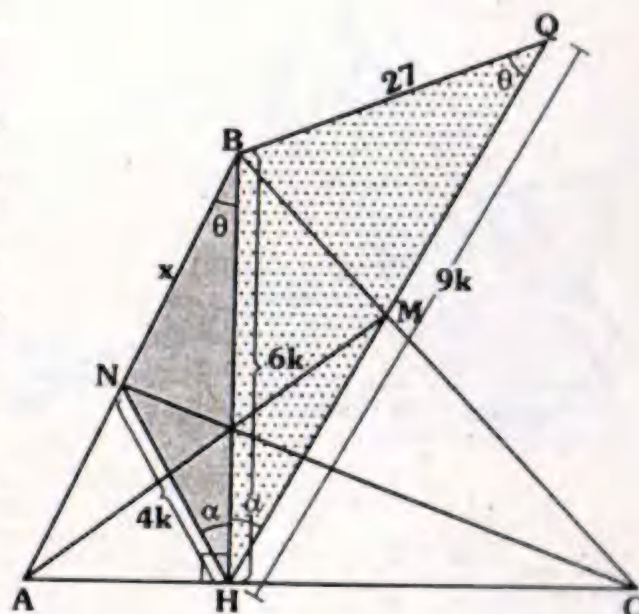
- $\triangle ADM \sim \triangle DNC$  y las líneas  $\overline{DQ}$  y  $\overline{DL}$  son bisectrices homólogas.

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore ad = bc$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 192**



Piden x.

- Por teorema de Blanchet:

$$m\angle NHB = m\angle BHM$$

- Como:

$$\frac{NH}{HB} = \frac{HB}{HQ}$$

$$\Rightarrow \triangle NHB \sim \triangle BHQ \text{ (2do caso)}$$

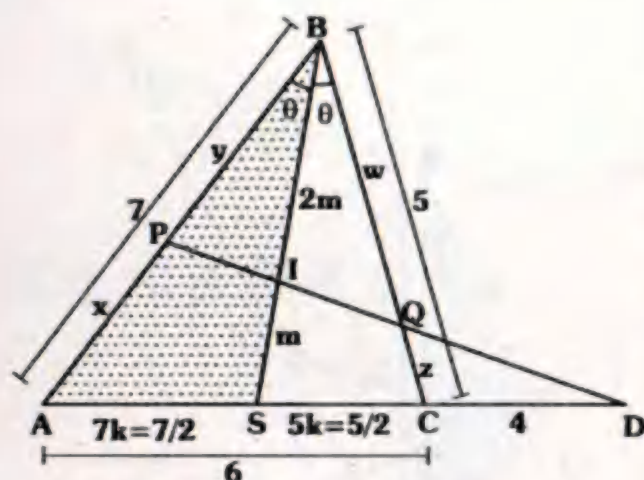
$$\Rightarrow \frac{x}{27} = \frac{4k}{6k}$$

$$\therefore x = 18$$

**Clave D**



RESOLUCIÓN N° 193



Nos piden:  $\frac{x}{y} + \frac{z}{w}$

- Por teorema de la bisectriz:

$$AS = 7k \text{ y } SC = 5k$$

- Por teorema del incentro:

$$\frac{BS}{IS} = \frac{7+5}{6} = 2$$

- Por teorema de Menelao:

- \* En  $\triangle ABS$ :

$$x(2m) \left( \frac{13}{2} \right) = y(m)(10) \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{10}{13}$$

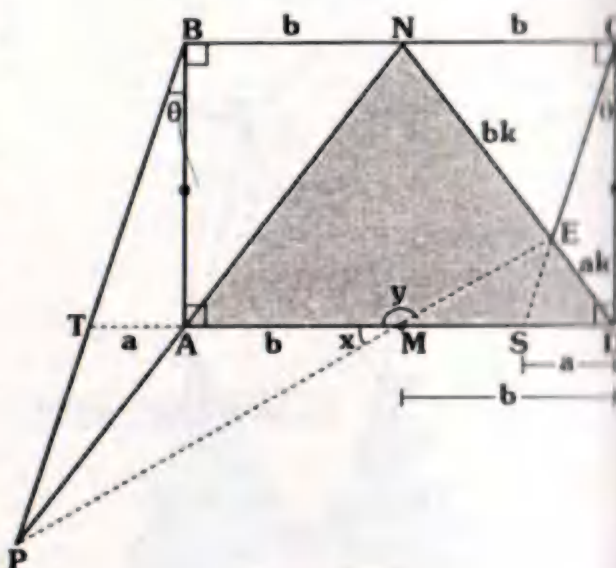
- \* En  $\triangle SBC$ :

$$z(2m) \left( \frac{13}{2} \right) = w(m)(4) \Rightarrow \frac{z}{w} = \frac{4}{13}$$

$$\therefore \frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{14}{13}$$

Clave **E**

RESOLUCIÓN N° 194



Nos piden:

$$m\angle PMA + m\angle AME$$

- $\triangle SED \sim \triangle CEN \Rightarrow ED = ak \text{ y } NE = bk$

- $\angle BAT \cong \angle CDS \Rightarrow AT = SD = a$

- $\triangle BNP \sim \triangle TAP \Rightarrow \frac{PA}{PN} = \frac{a}{b}$

- Notemos que en el triángulo AND se cumple:

$$\frac{NE}{ED} \cdot \frac{DM}{MA} \cdot \frac{AP}{NP} = 1$$

$$\frac{bk}{ak} \cdot \frac{b}{b} \cdot \frac{a}{b}$$

$\Rightarrow$  Como cumple el teorema de Menelao

$\Rightarrow P, M \text{ y } E \text{ son colineales}$

$$\therefore x + y = 180^\circ$$

Clave **A**

**RESOLUCIÓN N° 195**

Piden  $x/y$  en función de  $a$  y  $b$ .

- Luego de completar ángulos, verificamos:

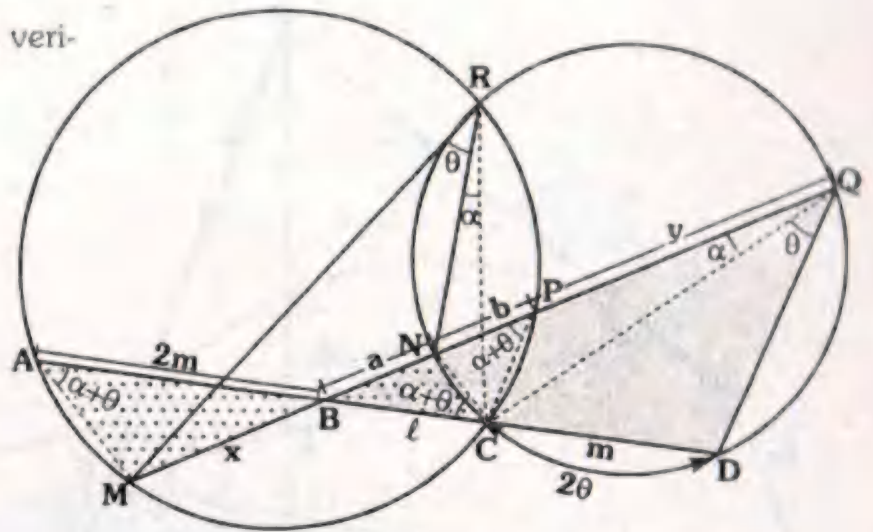
$$\overline{AM} // \overline{NC} \text{ y } \overline{CP} // \overline{DQ}$$

- Por teorema de Tales:

$$* \frac{x}{a} = \frac{2m}{\ell}$$

$$* \frac{a+b}{y} = \frac{\ell}{m}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{2a}{a+b}$$



**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 196**

- Piden  $xy/ab$
- Por propiedad de circunferencia:

$$m\widehat{BNS} = m\widehat{BHQ}$$

$$\Rightarrow m\angle BPS = m\angle BQC = \phi$$

$$\Rightarrow \triangle BPQC \text{ es inscriptible}$$

- Como  $m\widehat{MB} = m\widehat{LB}$

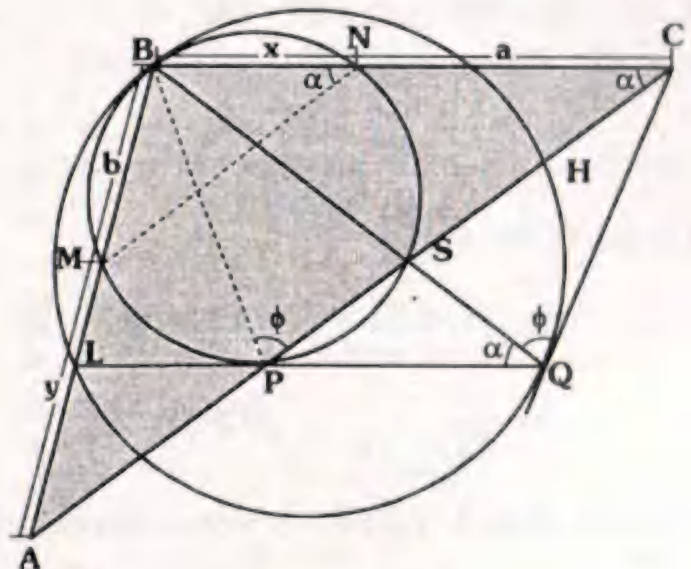
$$\Rightarrow m\angle LQB = m\angle MNB = \alpha$$

- Como  $\triangle BPQC$  es inscriptible

$$\Rightarrow m\angle PQB = m\angle PCB = \alpha$$

- Luego:  $\overline{MN} // \overline{AC} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{b}{y}$

$$\therefore \frac{xy}{ab} = 1$$



**Clave A**

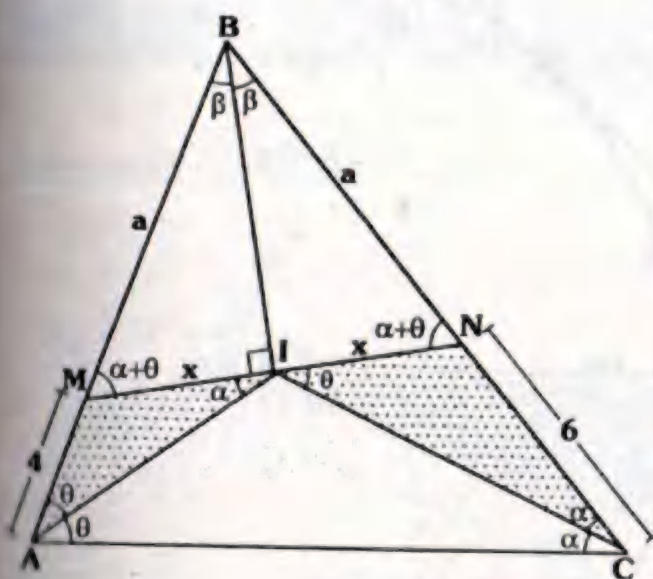


- Como  $m\angle OAP = m\angle OBP = 90^\circ \Rightarrow O, A, P, B$  y  $H$  son puntos concíclicos, debido a que  $AP = PB \Rightarrow m\angle AHP = m\angle PHB = \beta$
- Luego  $A, L, B$  y  $E$  es una cuaterna armónica  $\Rightarrow \frac{w}{z} = \frac{4\ell}{2\ell} \Rightarrow w = 2z$
- $\triangle ABHO$ : inscriptible

$$\Rightarrow \frac{\text{CH}}{\text{CE}} = \frac{\ell}{2\ell} \Rightarrow 2(\text{CH}) = \text{CE}$$

$$\therefore \frac{x}{v} = 4$$

Clave C

**RESOLUCIÓN N° 198**

Piden MN.

- Notemos que el  $\triangle MBN$  es isósceles:

$$\Rightarrow MI = IN = x$$

- En  $\triangle AMNC$ :

$$m\angle BMN = m\angle MNB = \frac{2\theta + 2\alpha}{2} = \theta + \alpha$$

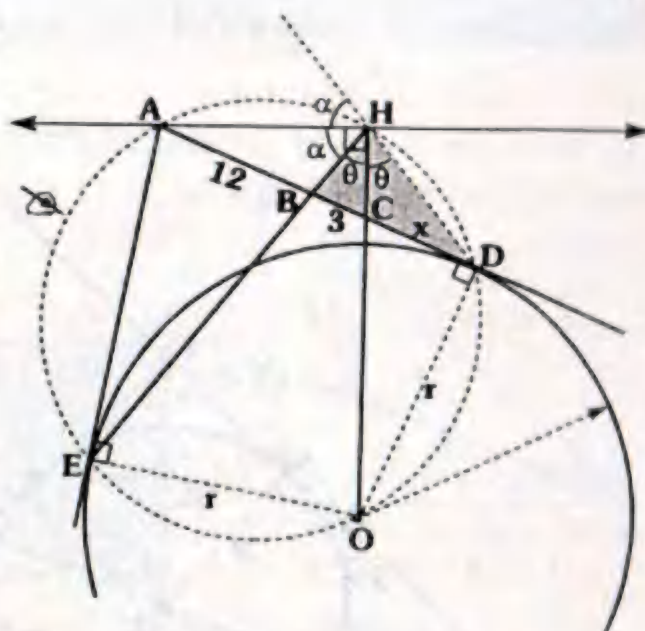
- Luego:  $\Delta AMI \sim \Delta INC$

$$\Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{4}{x}$$

$$\Rightarrow x = 2\sqrt{6}$$

$$\therefore MN = 4\sqrt{6}$$

**Clave** **D**

**RESOLUCIÓN N° 199**

Nos piden x.

- Como:

$$m\angle OEA = m\angle ODA = 90^\circ$$

$\Rightarrow$  O, D, H, A y E son concíclicos, debido a que  $OE=OD$

$$\Rightarrow m_{\angle DHO} = m_{\angle OHE}$$

- Luego D, C, B y A constituyen una cuaterna armónica.

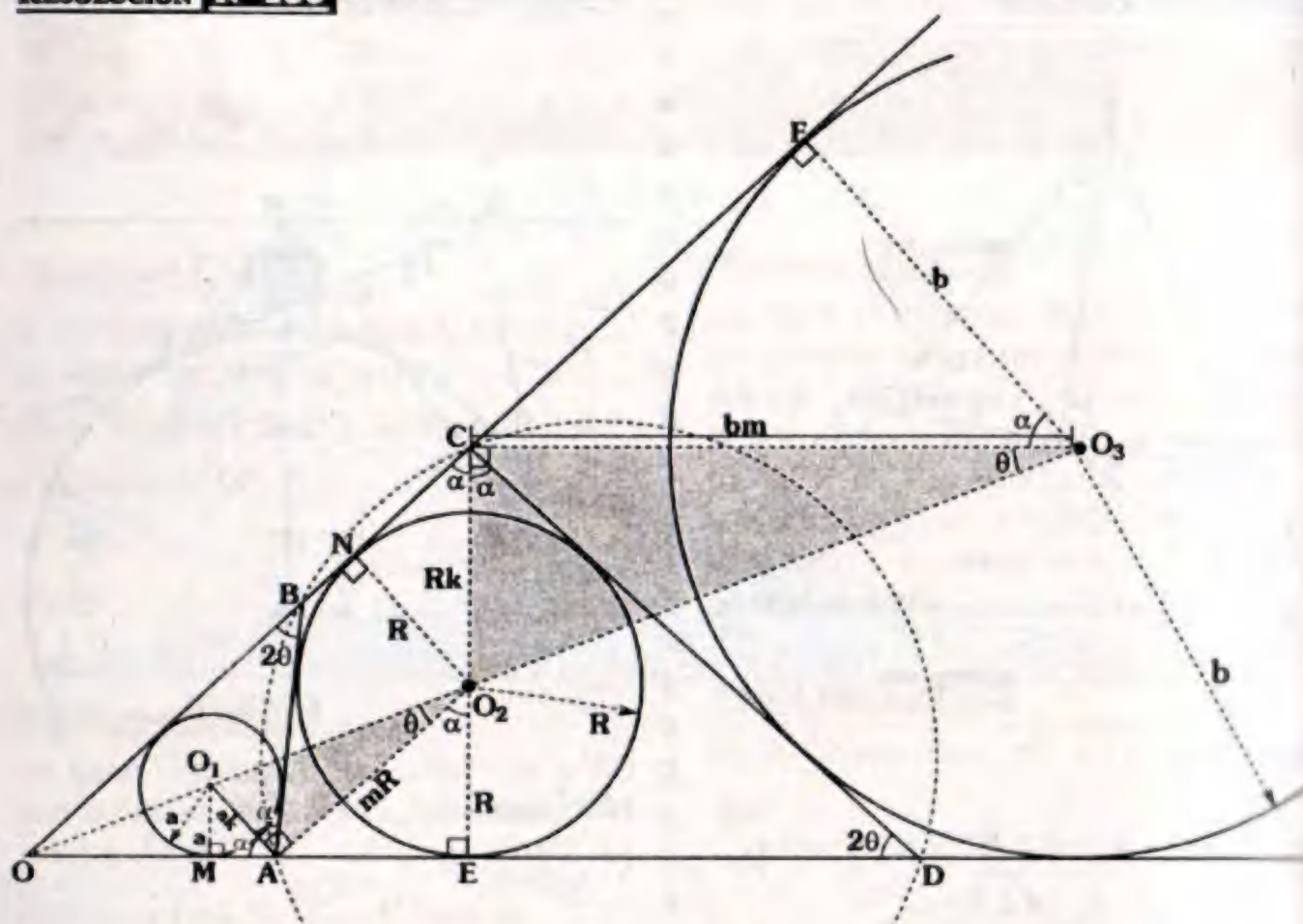
$$\Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{15+x}{12}$$

$$\therefore x = 5$$

Clave **E**



**RESOLUCIÓN N° 200**



Piden  $R$  en función de  $a$  y  $b$ .

- Como el  $\triangle ABCD$  es bicéntrico (es decir es inscrito y circunscrito)

$$\Rightarrow m\angle OAB = m\angle BCD = 2\alpha \text{ y}$$

$$m\angle ADC = m\angle ABO = 2\theta$$

- $\triangle O_1MA \sim \triangle O_2NC \Rightarrow O_1A = ak \text{ y } O_2C = Rk$

- $\triangle O_2EA \sim \triangle O_3FC \Rightarrow O_3C = bm \text{ y } O_2A = mR$

$$\triangle O_1AO_2 \sim \triangle O_2CO_3 \Rightarrow \frac{ak}{Rk} = \frac{mR}{bm}$$

$$\therefore R = \sqrt{ab}$$

**Clave B**

# Semestral Intensivo

## 207



Nos piden  $\frac{a}{b}$  ; dato:  $\frac{m}{n} = k$

- Como AWPV es un paralelogramo:  
AW=br; WB=ar; AV=ak y VC=bk
- Por teorema de Ceva en el  $\triangle ABC$  (pues  $\overline{AU}$ ,  $\overline{BV}$  y  $\overline{CW}$  son cevianas concurrentes):

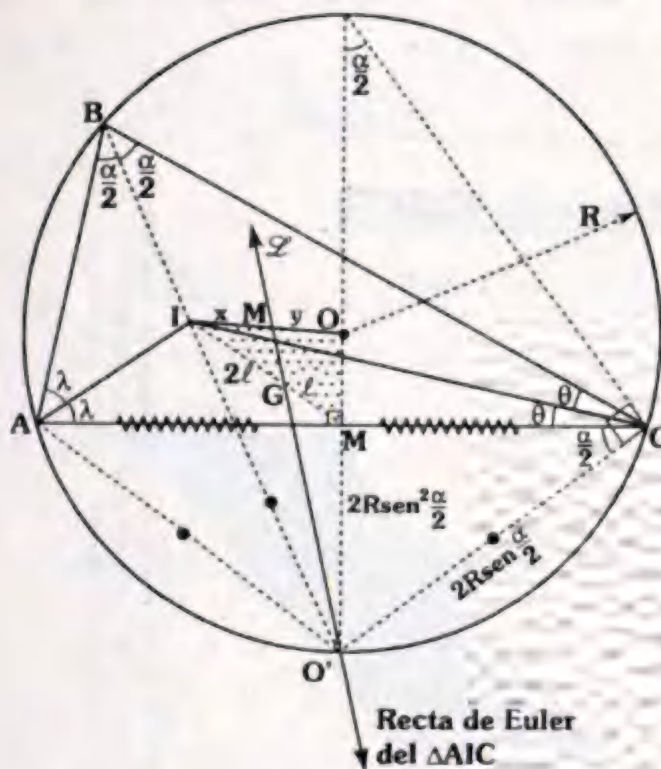
$$m(br)(bk) = n(ar)(ak)$$

$$\Rightarrow \frac{m}{\frac{n}{k}} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \sqrt{k}$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 203**



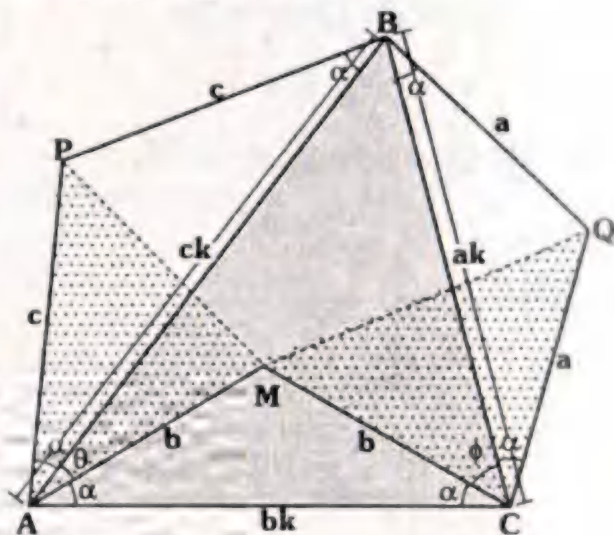
- Nos piden:  $\frac{x}{y}$  en función de  $\alpha$ .
- Por propiedad  $O'A=O'I=O'C \Rightarrow O'$  es circuncentro del  $\triangle AIC$
- Como  $AM=MC \Rightarrow \overline{IM}$  es mediana del  $\triangle AIC$ , ubicamos G baricentro de dicho triángulo ( $IG=2(GM)$ ).
- Luego  $\overleftrightarrow{O'G}$  es recta de Euler del  $\triangle AIC$ .
- Por teorema de Menelao:

$$(x)(\ell)(R) = (y)(2\ell)\left(2R\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{x}{y} = 4\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 204**



- Piden demostrar que MPBQ es un paralelogramo.
- Como los  $\triangle$ s APB, BQC y AMC son semejantes, entonces:  
Sea  $AP=PB=c$ ;  $BQ=QC=a$  y  $AM=MC=b$

$$\Rightarrow AB=ck; BC=ak \text{ y } AC=bk$$

- Notamos  $\triangle MAP \sim \triangle CAB$

$$\text{Pues } \frac{PA}{AM} = \frac{BA}{AC} \text{ y } m\angle MAP = m\angle CAB$$

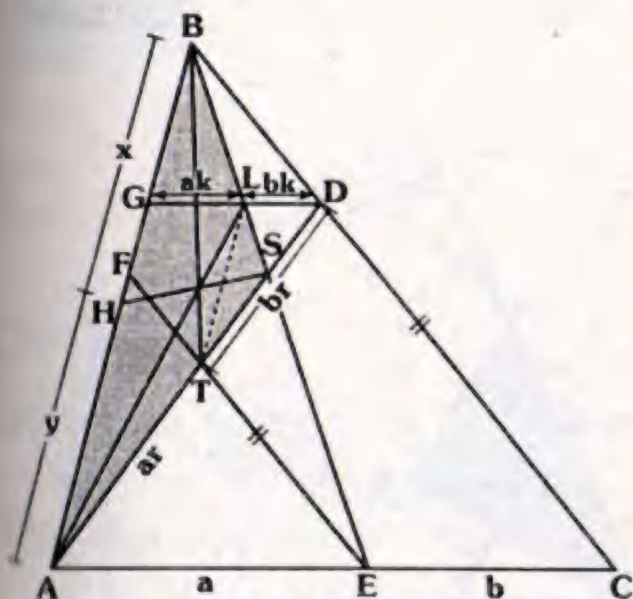
$$\Rightarrow MP=a$$

- Análogamente:

$$\triangle QCM \sim \triangle BCA \Rightarrow MQ=c$$

- Como los lados opuestos del cuadrilátero MPBQ son iguales entonces MPBQ es un paralelogramo.

### RESOLUCIÓN N° 205



Nos piden  $\frac{x}{y}$ .

- Por teorema de Tales:

$$AT=ar \text{ y } TD=br$$

- Por propiedad de semejanza:

$$GL=ak \text{ y } LD=bk \Rightarrow \overline{AB} // \overline{TL}$$

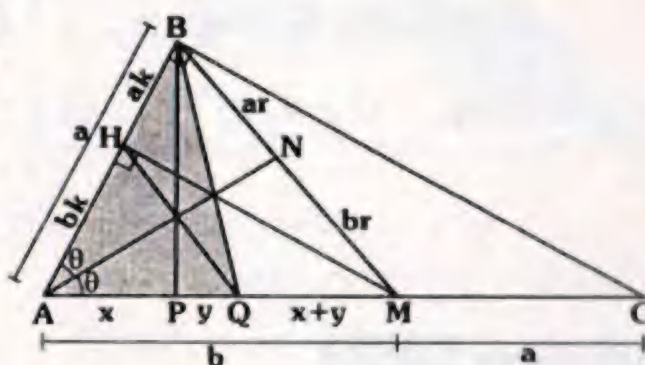
- En  $\triangle ASB$ , por teorema de Ceva:

$$x=y$$

$$\therefore \frac{x}{y} = 1$$

**Clave A**

### RESOLUCIÓN N° 206



- Nos piden  $AP/PQ$ .

- Sea  $AB=MC=a$  y  $AM=b$ , entonces:

$$AH=bk; HB=ak; BN=ar \text{ y } NM=br$$

- En  $\triangle ABM$ , por teorema de Ceva:

$$(AQ)akbr = (MQ)arbr$$

$$\Rightarrow AQ=MQ$$

- Como A, P, Q y M constituyen una cuaterna armónica:

$$\frac{x}{y} = \frac{2(x+y)}{(x+y)}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = 2$$

**Clave A**



**RESOLUCIÓN N° 207**

Nos piden  $x$ .

- Por propiedad  $BH = 2(\overbrace{OO'}) = 4a$

- Por teorema de Tales:

$$\frac{12-m}{m+2} = \frac{5a}{2a} \Rightarrow m=2$$

- $\triangle NBTO$ : inscriptible

$$\Rightarrow m\angle ONT = m\angle OBC = \theta$$

- En  $\triangle KNB$ :  $x^2 = (2)(12)$

$$\therefore x = 2\sqrt{6}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 208**

Nos piden  $\frac{\sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt{a}}$

- Por propiedad de semejanza:

$$(PS)^2 = bc \rightarrow PS = \sqrt{bc}$$

- Por propiedad del ángulo equilátero:

$$b+c-a=h$$

- $\triangle ATB \sim \triangle ASM$

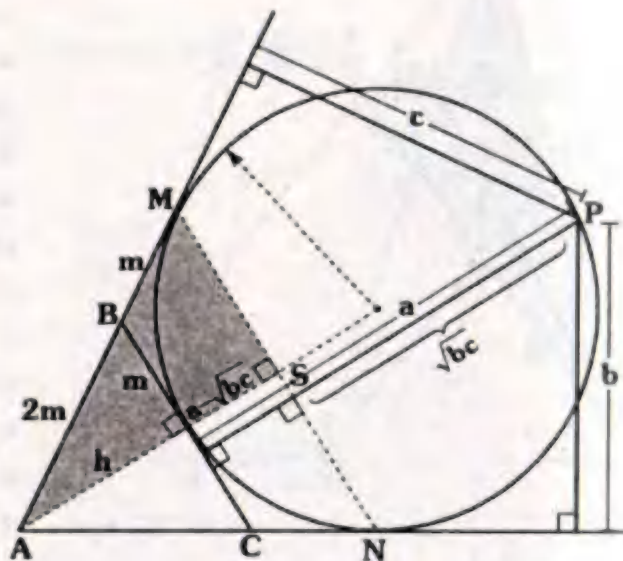
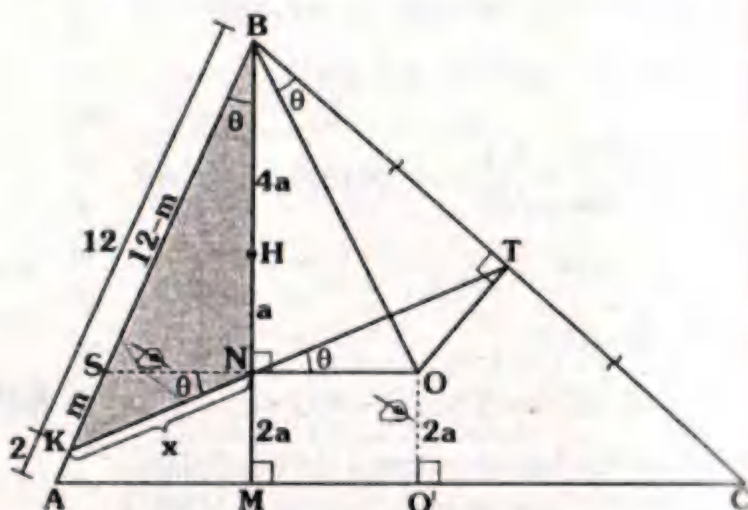
$$\frac{h}{a-\sqrt{bc}} = \frac{2m}{m}$$

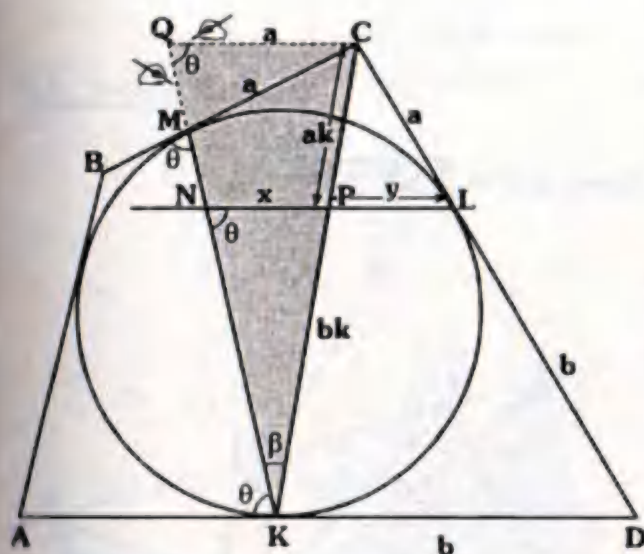
$$b+c-a=2(a-\sqrt{bc}) \Rightarrow \underbrace{b+c+2\sqrt{bc}} = 3a$$

$$(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = 3a$$

$$\therefore \frac{\sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt{a}} = \sqrt{3}$$

**Clave C**



**RESOLUCIÓN N° 209**

Por demostrar:  $x=y$

•  $\triangle KCD \sim \triangle PCL$

$$\Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{a}{a+b}$$

$$\Rightarrow y = \frac{ab}{a+b} \quad \dots(I)$$

• Se traza la paralela por C a  $\overline{AD}$  que corta a la prolongación de  $\overline{KM}$  en Q.

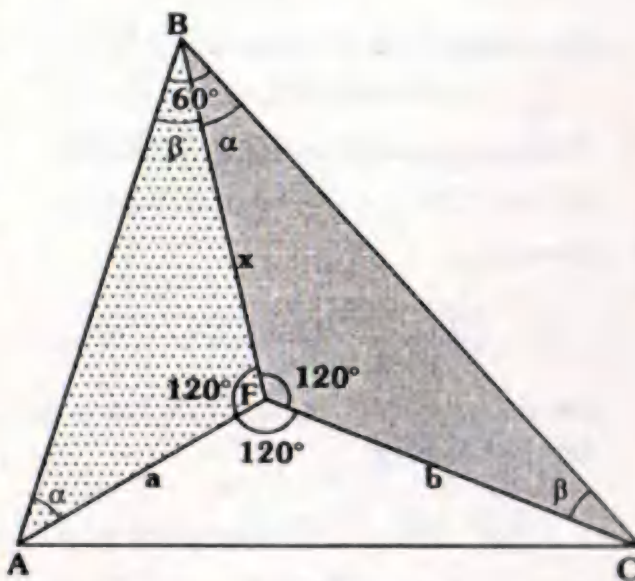
•  $\triangle KNP \sim \triangle KQC$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{bk}{(a+b)k}$$

$$\Rightarrow x = \frac{ab}{a+b} \quad \dots(II)$$

• De (I) y (II) se concluye que:

$$\therefore x=y$$

**RESOLUCIÓN N° 210**

Nos piden x, en función de a y b.

• Como F es punto de Fermat, entonces:

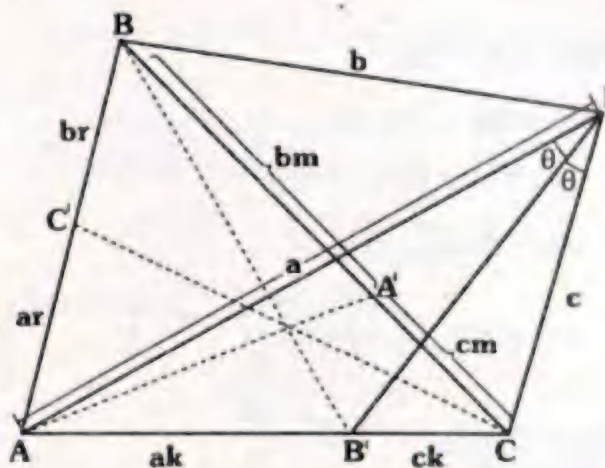
$$m\angle AFB = m\angle BFC = m\angle CFA = 120^\circ$$

• Notamos que  $\triangle AFB \sim \triangle BFC$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{b}{x}$$

$$\therefore x = \sqrt{ab}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 211**





- Por teorema de Newton:

$\overline{AN}$ ,  $\overline{CM}$  y  $\overline{TR}$  concurren

- $\overline{TR}$  es base media  $\Rightarrow BG=GG'$

- Por teorema de Van Aubel:

$$\frac{cK}{aK} + \frac{cK}{bK} = \frac{BG}{GG'} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{c}{a} + \frac{c}{b} = 1 \Rightarrow c = \frac{ab}{a+b} \dots (II)$$

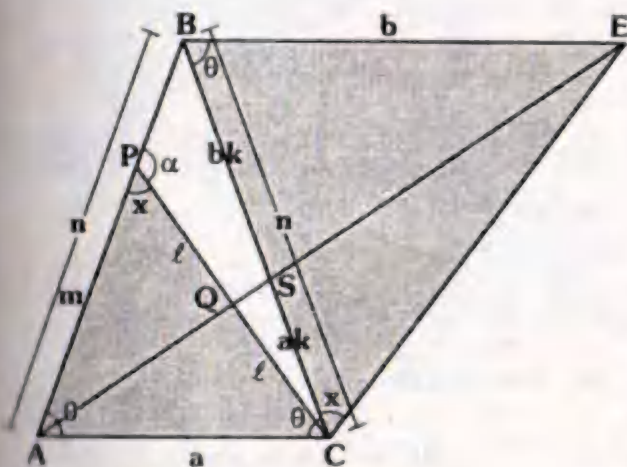
- B, G<sub>2</sub>, G y G': cuaterna armónica

$$\Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{2(m+n)}{m+n} \Rightarrow n=2m$$

$$\bullet \quad \frac{x}{m} = \frac{c}{n} \Rightarrow x = \frac{c}{2} \quad \dots(III)$$

- De (I), (II) y (III):  $y=2x$

$$\therefore \text{HG} = \text{GS}$$

**RESOLUCIÓN N° 214**

Find  $x$  in función de  $\alpha$ .

- Sea  $AC=a$  y  $BE=b \Rightarrow$  como:
- $\triangle ASC \sim \triangle ESB \Rightarrow CS=ak$  y  $BS=bk$
- En  $\triangle PBC$ , usemos el teorema de Menelao ( $\overleftrightarrow{SQA}$  es la recta secante):

$$(n)(\ell)(ak) = (\ell)(bk)(m)$$

$$\Rightarrow \frac{n}{b} = \frac{m}{a}$$

- ❖ • Como:  $m_{\text{PAC}} = m_{\text{CPE}}$

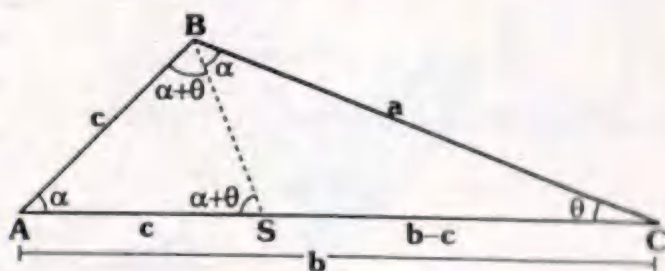
$$\Rightarrow \Delta PAC \sim \Delta CBE$$

$$\Rightarrow m\angle APC = m\angle BCE$$

- Como  $x + \alpha = 180^\circ$

$$\therefore x = 180^\circ - \alpha$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 215**

- ❖ Nos piden la relación entre  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

∴ Dato:  $3\alpha + 20 = 180^\circ$

- ❖ • Se traza la ceviana interior BS, tal que:
- ❖  $m\angle CBS = \alpha$
- ❖ • Luego observamos:

$$m\angle ASB = m\angle ABS = \alpha + \theta$$

- ❖ • En  $\triangle ABC$ :  $a^2 = (b - c)b$

$$\therefore a^2 = b^2 - bc$$

**Clave A**







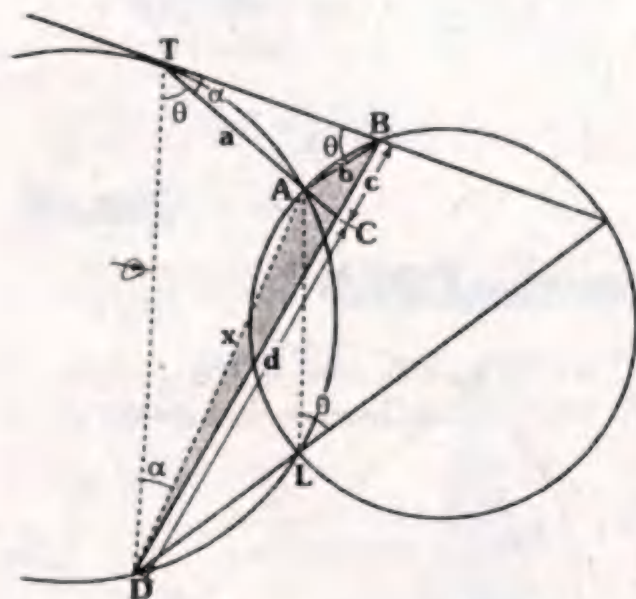


$\Rightarrow \triangle LSMN$ : inscriptible

$$\therefore x = 90^\circ$$

**Clave** **E**

**RESOLUCIÓN N° 222**



Nos piden la relación entre "a, b, c y d".

- Al completar ángulos, verificamos:

$$m\angle DAC = m\angle CAB = \alpha + \theta$$

$\Rightarrow \overline{AC}$  es bisectriz interior del  $\triangle DAB$

$$\Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{d}{c} \quad \dots(I)$$

- $\triangle DTA \sim \triangle TAB$ :

$$\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{a}{b} \quad \dots(II)$$

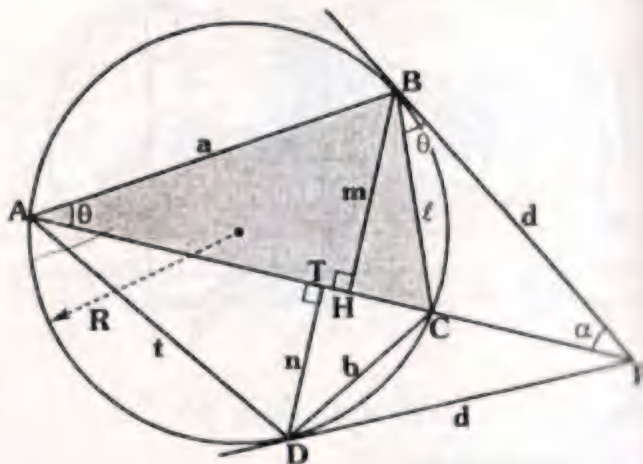
- De (I) y (II):

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{d}{c}$$

$$\therefore ca^2 = db^2$$

**Clave** **C**

**RESOLUCIÓN N° 223**



Piden R.

Datos:  $ab = \sqrt{k}$  y  $mn = k$

- Como  $\triangle ABP \sim \triangle BCP$

$$\Rightarrow \frac{a}{\ell} = \frac{d}{CP} \quad \dots(I)$$

- Análogamente:  $\triangle ADP \sim \triangle DCP$

$$\frac{t}{b} = \frac{d}{CP} \quad \dots(II)$$

- De (I) y (II):  $ab = \ell t$   $\dots(III)$

- Por teorema del producto de lados:

$$* \text{ En } \triangle ABC: a\ell = 2mR$$

$$* \text{ En } \triangle ADC: bt = 2nR$$

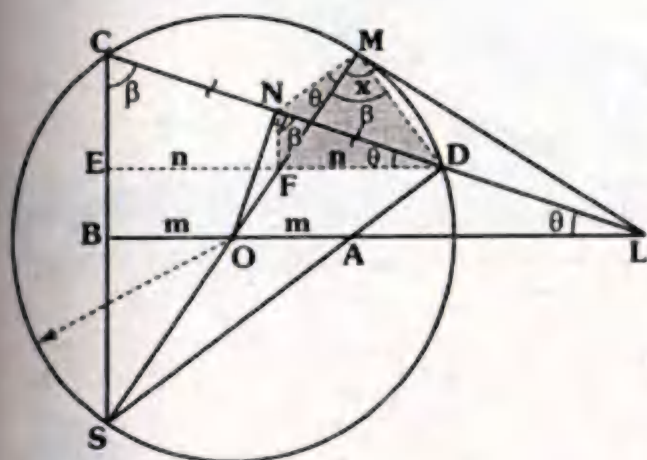
$$\Rightarrow (ab)(\ell t) = 4mnR^2 \quad \dots(IV)$$

- De (III) y (IV):

$$(ab)^2 = 2(mn)R^2$$

$$\therefore R = \frac{1}{2} = 0,5$$

**Clave** **C**

**RESOLUCIÓN N° 224**

Nos piden x.

- Se ubica E en  $\overline{BC}$  tal que:

$$\overline{DE} // \overline{AB} \Rightarrow \text{en } \triangle SDE: EF = FD$$

- Se traza  $\overline{ON} \perp \overline{CD}$  (N en  $\overline{CD}$ )  
 $\Rightarrow CN = ND$

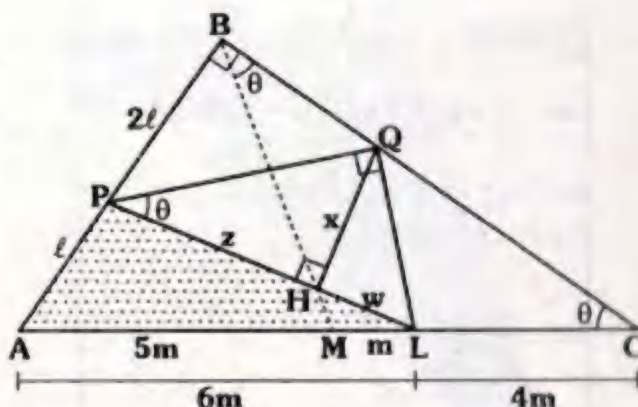
- En  $\triangle ECD$ :  $\overline{FN}$  es base media  
 $\Rightarrow \overline{EC} \parallel \overline{FN}$ , luego:

$$m\angle ECD = m\angle FND = \beta$$

- $\triangle$ FNMD: inscriptible  
 $\Rightarrow m \angle NMF = m \angle NDF = 0$

- $\triangle$ ONML: inscriptible

$$\therefore x = 90^\circ$$

Clave **B****RESOLUCIÓN N° 225**

- Piden x, dato:  $PL=13$  y  $2(AL)=3(LC)$

- En  $\triangle PQL$ :

$$x^2 = zw$$

- Como  $\triangle PBQH$  es inscriptible

$$\Rightarrow m \angle HBQ = \theta$$

entonces al prolongar  $\overline{BH}$ , corta en  $M$   
a  $\overline{AC}$ , entonces  $\overline{BM}$  es mediana

- $AM=MC$ , sea:

$$AL=6m \Rightarrow LC=4m \text{ (dato)} \Rightarrow ML=m$$

- En  $\triangle ALP$ , por teorema de Menelao

$$(m)(z)(3\ell) = (5m)(w)(2\ell)$$

$$\Rightarrow 3z = 10w$$

- Como  $PL=13 \Rightarrow z=10$  y  $w=3$

- En  $\triangle PQL$ :  $x^2 = (10)(3)$

$$\therefore x = \sqrt{30}$$

Clave **E**



**RESOLUCIÓN N° 226**

Piden  $x$  en función de  $a$ ,  $b$  y  $k$ .

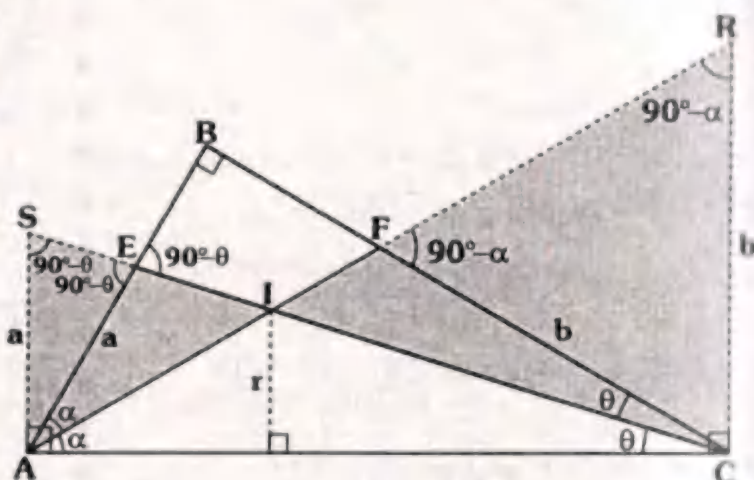
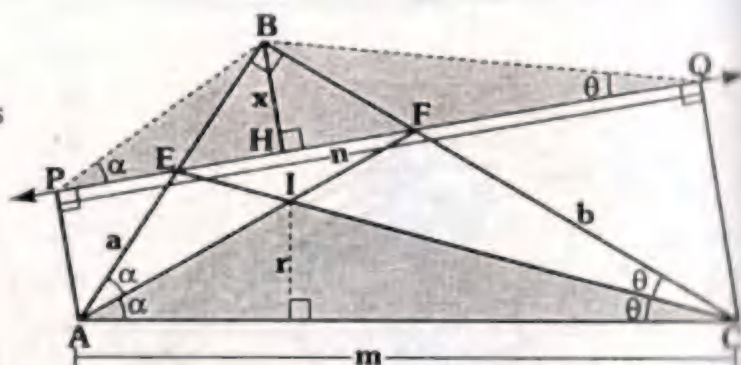
- $\triangle APBF$  y  $\triangle EBQC$  son inscriptibles  
 $\Rightarrow m\angle BPQ = \alpha$  y  $m\angle BQP = \theta$
- $\triangle PBQ \sim \triangle AIC$  ( $\overline{BH}$  e  $\overline{IT}$  son alturas homólogas)

$$\Rightarrow \frac{x}{r} = \frac{\frac{n}{m}}{k} \Rightarrow x = rk \quad \dots(I)$$

- Hallemos ahora " $r$ " en función de " $a$  y  $b$ ".
- $\triangle EAS$  y  $\triangle FCR$ : isósceles  $\Rightarrow AS = a$  y  $RC = b$ , por propiedad:

$$\Rightarrow r = \frac{ab}{a+b}$$

$$\therefore x = \frac{kab}{a+b}$$



**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 227**

Piden  $x$ .

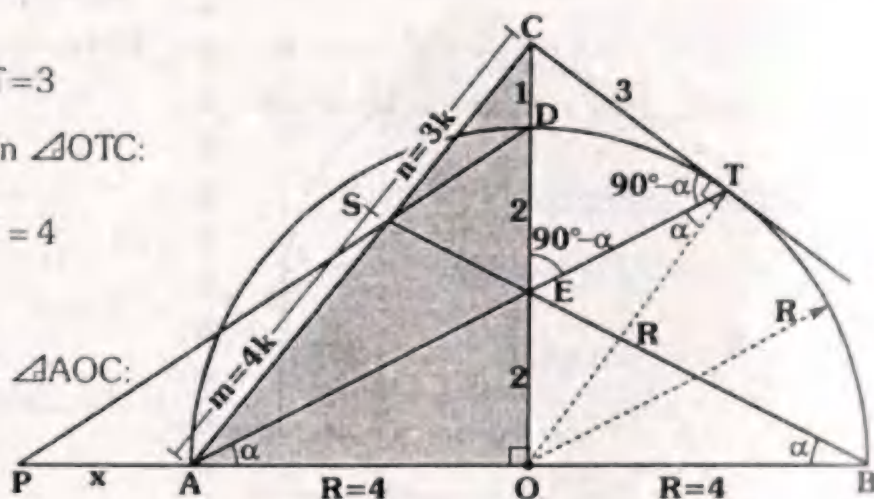
- $\triangle ECT$ : isósceles  $\Rightarrow EC = CT = 3$
- Por teorema de pitágoras, en  $\triangle OTC$ :

$$R^2 + 3^2 = (R+1)^2 \Rightarrow R = 4$$

- Luego:  $OE = 2$
- Por teorema de Menelao en  $\triangle AOC$ :

\*  $\overleftrightarrow{SEB}$ : recta secante

$$\Rightarrow m(3)(4) = n(2)(8) \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{4}{3}$$



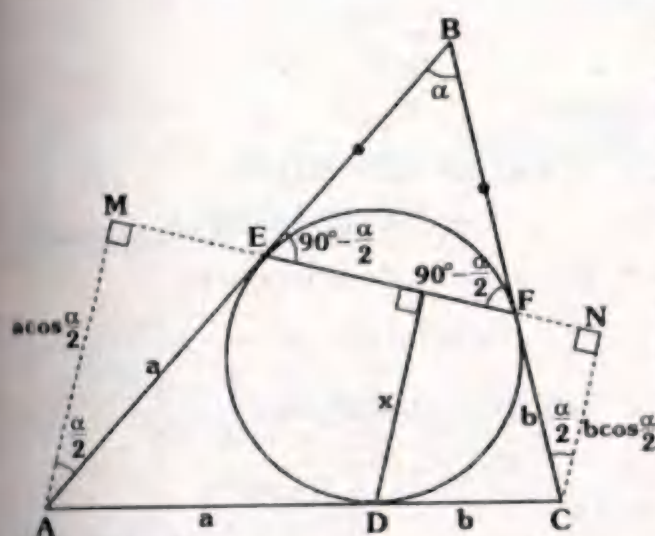
\*  $\overleftrightarrow{PSD}$ : recta secante

$$\Rightarrow (4)(3x) \cdot x = 1(4x)(x+4)$$

$$\therefore x = 2$$

**Clave** **C**

**RESOLUCIÓN N° 228**



Piden  $x$  en función de  $a$ ,  $b$  y  $\alpha$ .

• Se trazan  $\overline{AM}$  y  $\overline{CN}$  perpendiculares a la recta  $\overline{EF}$ .

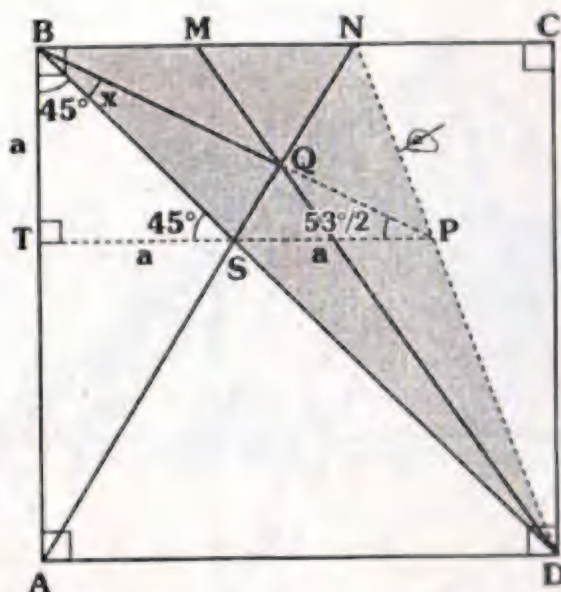
• En el trapecio  $AMNC$ :

$$x = \frac{\left(a \cos \frac{\alpha}{2}\right)(b) + \left(b \cos \frac{\alpha}{2}\right)a}{a+b}$$

$$\therefore x = \frac{2ab}{a+b} \cos \frac{\alpha}{2}$$

**Clave** **C**

**RESOLUCIÓN N° 229**



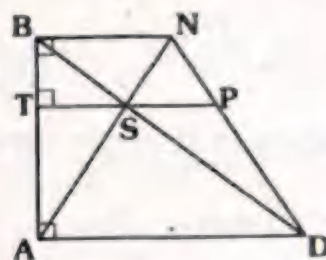
Piden  $x$ .

• En  $\triangle BDN$ : por teorema de Ceva

$$\overline{SP} // \overline{BN}$$

• Luego:  $\overline{PS} \perp \overline{BA}$

• En el trapecio  $ABND$ :



Se cumple  $TS = SP$

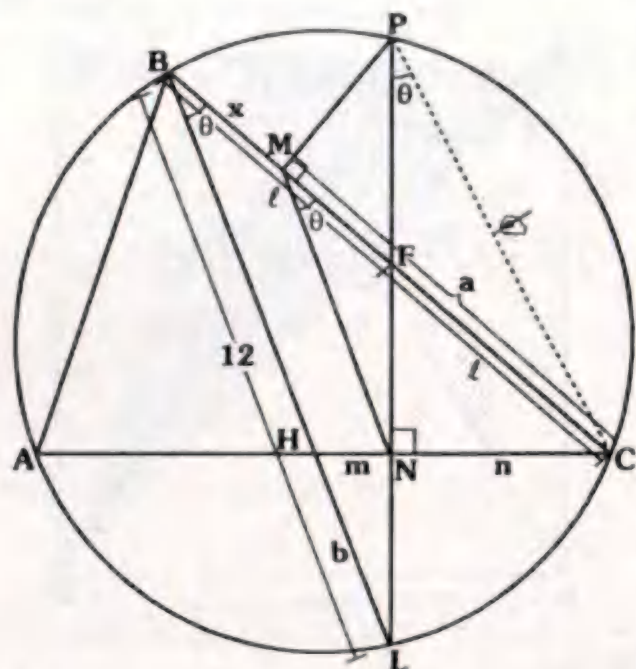
• Luego:  $\angle BTP$ : notable de  $\frac{53^\circ}{2}$

$$\therefore x = \frac{37^\circ}{2} = 18^\circ 30'$$

**Clave** **E**



**RESOLUCIÓN N° 230**



Piden  $x$ .

Dato:  $ab=54$

- Al completar ángulos notamos que  $\overline{LB} \parallel \overline{NM}$
- Por teorema de Tales:

$$\frac{x}{a} = \frac{m}{n} \quad \dots(I)$$

- Por teorema de Menelao, en el  $\triangle HBC$ :

( $\overleftrightarrow{NLF}$  es la recta secante)

$$(\ell)(n)(b) = (\ell)(m)(12) \Rightarrow \frac{b}{12} = \frac{m}{n} \quad \dots(II)$$

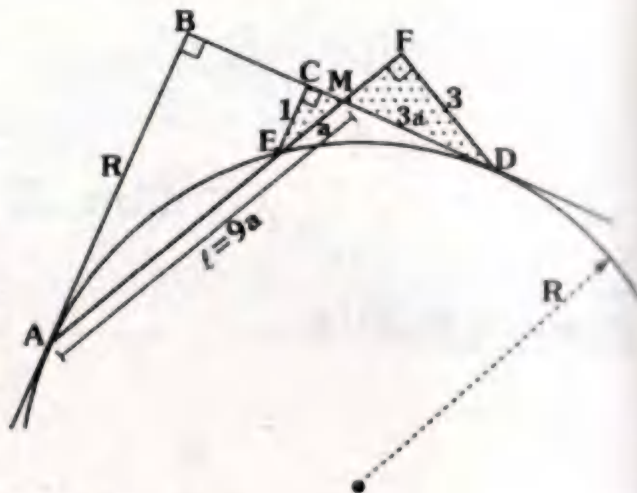
- De (I) y (II):

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{12} \Rightarrow x = \frac{ab}{12}$$

$$\therefore x = 4,5$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 231**

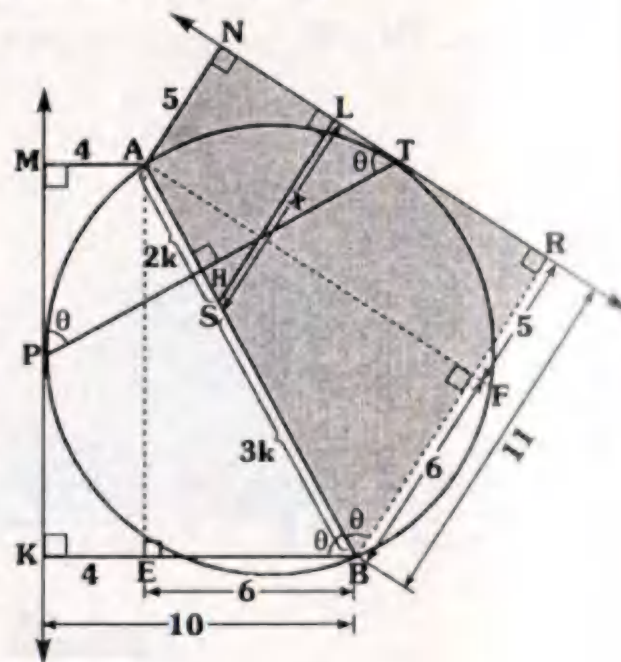


Piden  $R$ .

- Como  $\triangle ECM \sim \triangle DFM$   
 $\Rightarrow MD=3a$  y  $EM=a$
- Por teorema de la tangente:  
 $(3a)^2 = a\ell \Rightarrow \ell = 9a$
- $\triangle ECM \sim \triangle ABM \Rightarrow \frac{R}{1} = \frac{9a}{a}$   
 $\therefore R = 9$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 232**



Piden  $x$ .

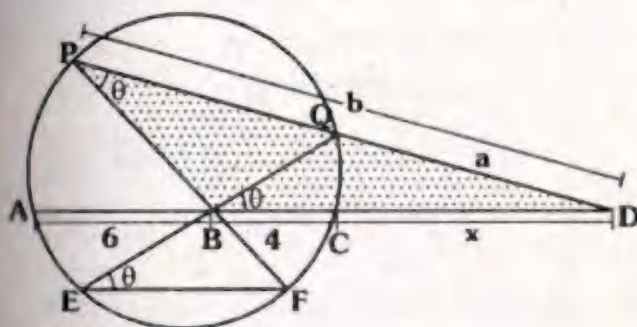
- Del dato:  $3(BH) + 3(AH) = 5(BS)$   
 $\Rightarrow 3(AB) = 5(BS) \Rightarrow AB = 5k$  y  $BS = 3k$
- Como  $\Rightarrow m\angle MPT = m\angle NTP$   
 $\Rightarrow m\angle KBA = m\angle ABR \Rightarrow BE = BF = 6$
- En el trapecio ANRB:

$$x = \frac{5(3k) + 11(2k)}{2k + 3k}$$

$$\therefore x = \frac{37}{5} = 7,4$$

**Clave** **E**

### RESOLUCIÓN N° 233



Piden  $x$ .

- Sea  $m\angle FEQ = \theta \Rightarrow m\angle FPQ = \theta$
- Como  $\overline{EF} \parallel \overline{AC} \Rightarrow m\angle CBQ = \theta$
- En  $\triangle PBD$ :

$$(x + 4)^2 = ab \quad \dots(I)$$

- Por teorema de la secante:

$$ab = x(x + 10) \quad \dots(II)$$

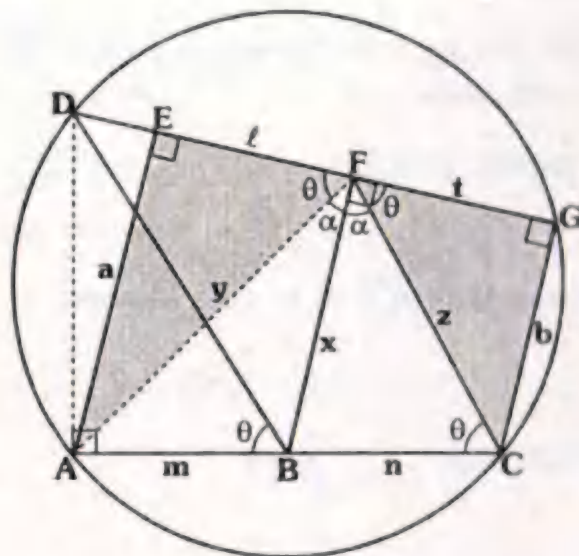
- De (I) y (II):

$$(x + 4)^2 = x(x + 10)$$

$$\therefore x = 8$$

**Clave** **D**

### RESOLUCIÓN N° 234



Nos piden  $x$ .

Datos:  $ab = 15$  y  $mn - \ell t = 3$

- Notemos que el  $\triangle DFBA$  es inscriptible  
 $\Rightarrow m\angle AFE = \theta$
- En el  $\triangle AFC$ ,  $\overline{FB}$  es bisectriz interior.

$$\Rightarrow x^2 = yz - mn \quad \dots(I)$$

- Como  $\triangle AEF \sim \triangle CGF$ , por teorema de Dostor:

$$yz = ab + \ell t \quad \dots(II)$$

- De (I) y (II):

$$x^2 = ab + \ell t - mn$$

$$x^2 = \frac{ab}{15} - \underbrace{(mn - \ell t)}_3$$

$$\therefore x = 2\sqrt{3}$$

**Clave** **D**



**RESOLUCIÓN N° 235**

Piden x.

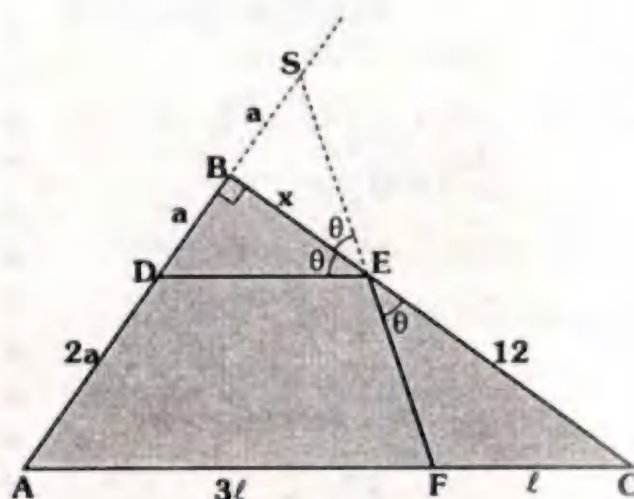
- Al prolongar  $\overline{FE}$  hasta que corte a  $\overleftrightarrow{AB}$  en  $S$ , notamos:

$$\triangle DES: \text{isósceles} \Rightarrow DB=BS=a$$

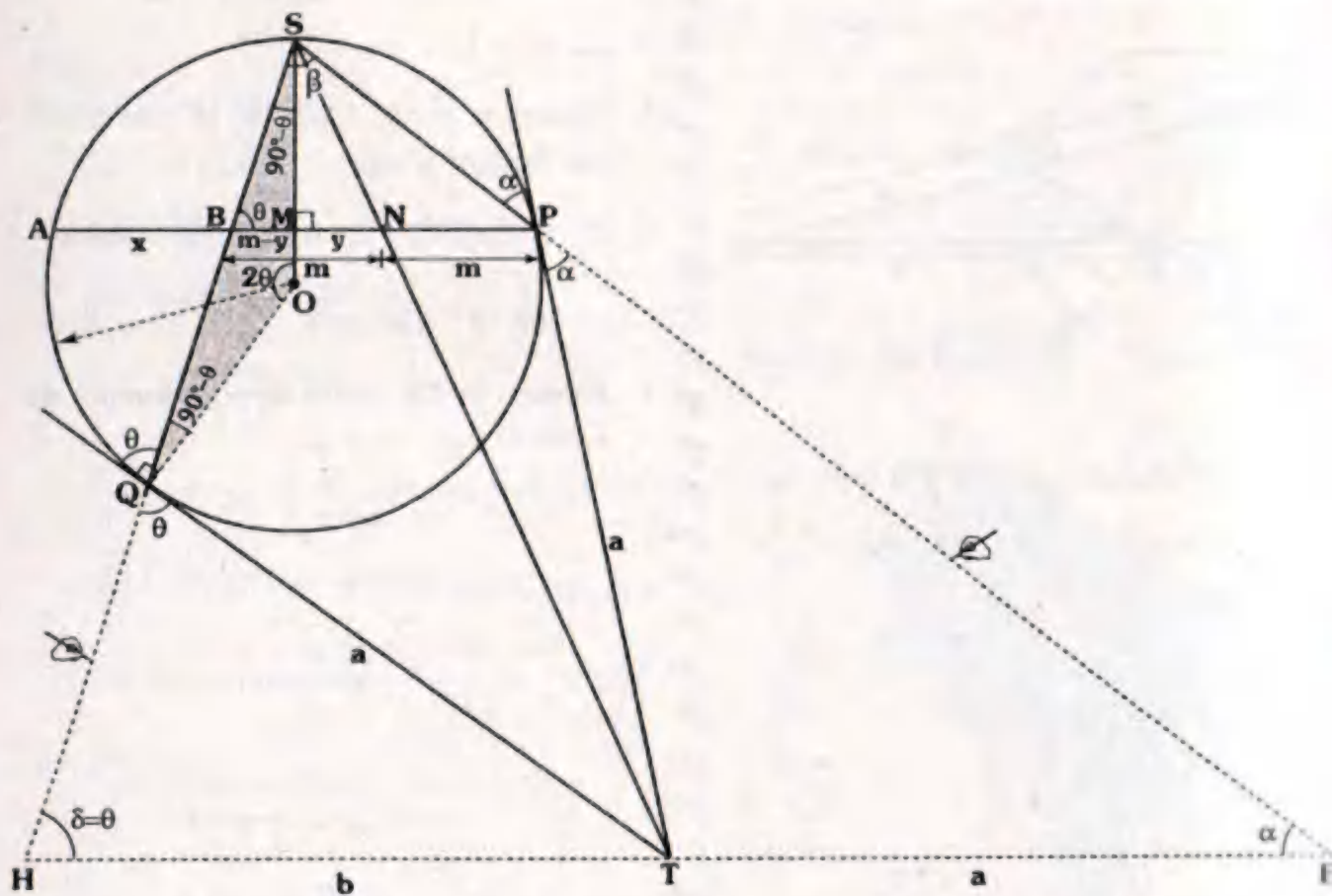
- En  $\triangle ABC$ , usemos el teorema de Menelao ( $\overleftrightarrow{FES}$  es la recta secante):

$$x\ell \cdot (4a) = (12)(3\ell)(a)$$

$$\therefore x = 9$$



**Clave**  **D**

**RESOLUCIÓN N° 236**

Nos piden x.

- Se prolonga  $\overline{SP}$  hasta **E** tal que  $TP=TE=a$

- Las rectas  $\overleftrightarrow{SQ}$  y  $\overleftrightarrow{ET}$  se cortan en H.
- En la circunferencia:  $m\widehat{QP} + m\widehat{PS} + m\widehat{SQ} = 360^\circ$   
 $\Rightarrow 2\beta + 2\alpha + 2\theta = 360^\circ \Rightarrow \beta + \alpha + \theta = 180^\circ$
- En  $\triangle HSE$ : como  $\beta + \alpha + \delta = 180^\circ \Rightarrow \delta = \theta \Rightarrow a = b$
- Como  $m\angle SBM = \theta \Rightarrow \overline{HE} \parallel \overline{BP}$
- $\triangle HSE \sim \triangle BSP \Rightarrow BN = NP = m$
- Como  $AM = MP \Rightarrow x + m - y = m + y$

$$\therefore \frac{x}{y} = 2$$

Clave **A****RESOLUCIÓN N° 237**

Nos piden x.

- Como ABCD es un rombo y  $m\angle BAD = 60^\circ \Rightarrow$  los triángulos ABD y BCD son equiláteros y

$$m\angle BAC = m\angle CAD = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 30^\circ$$

- $\triangle AFP \sim \triangle AHQ$ , si  $FP = a$  y  $HQ = b$

$$\Rightarrow AP = ak \text{ y } AQ = bk$$

- $\triangle ALP \sim \triangle ASQ$

$$\Rightarrow PL = EO = ar \text{ y } QS = GQ = br$$

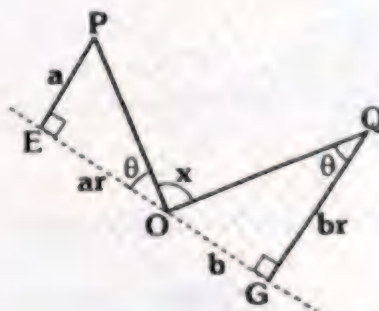
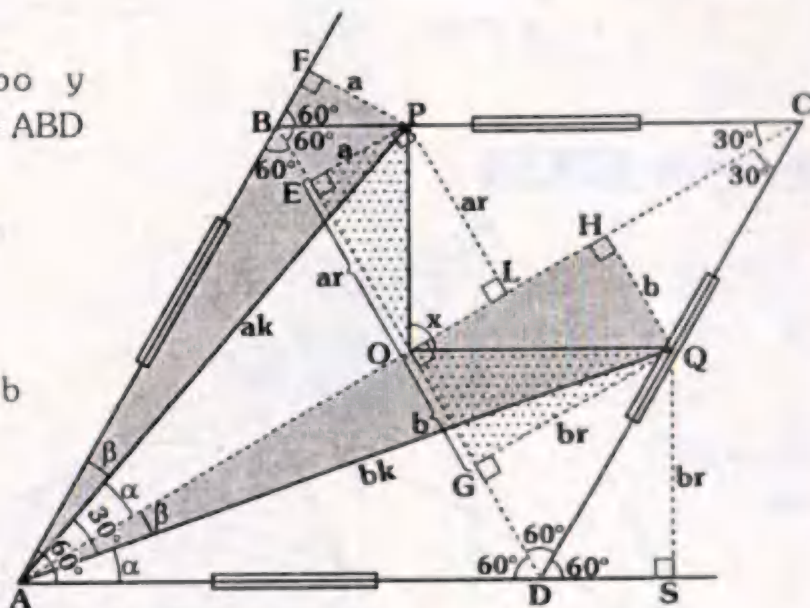
- Analicemos ahora la posición y las razones de los lados de los  $\triangle$ s OEP y QGO.

- Notemos que  $\triangle PEO \sim \triangle OQG$

$$\Rightarrow m\angle EOP = m\angle OQG$$

$$x + \theta = 90^\circ + \theta$$

$$\therefore x = 90^\circ$$

Clave **B**



**RESOLUCIÓN N° 238**

Nos piden  $x$ .

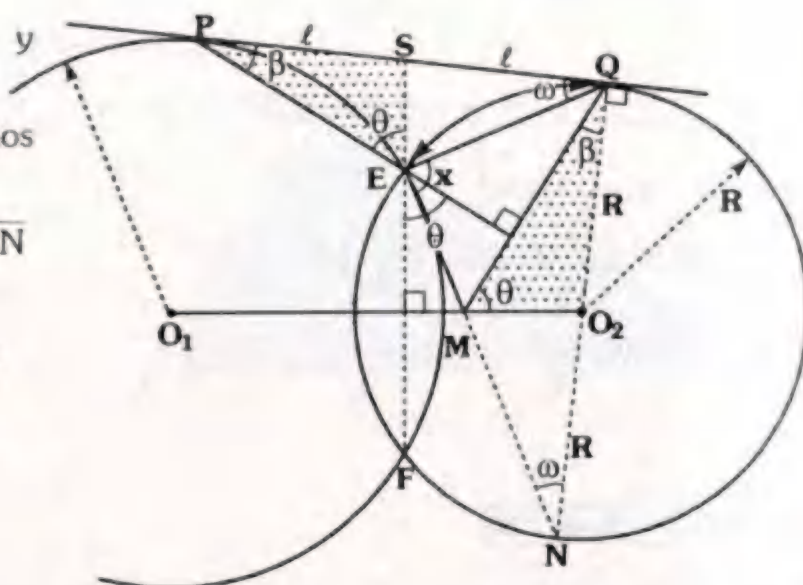
- Por propiedad:  $\overline{O_1O_2} \perp \overline{EF}$   
 $PS = SQ$
- Al completar ángulos, nos damos cuenta:

$\triangle PES \sim \triangle QO_2M \Rightarrow \overline{EQ}$  y  $\overline{MN}$   
son líneas homólogas.

- Luego:  $m\angle EQP = m\angle O_2NM$
- Como  $m\widehat{EQ} = 2(m\angle QNM)$   
 $\Rightarrow N, M$  y  $E$  son colineales.

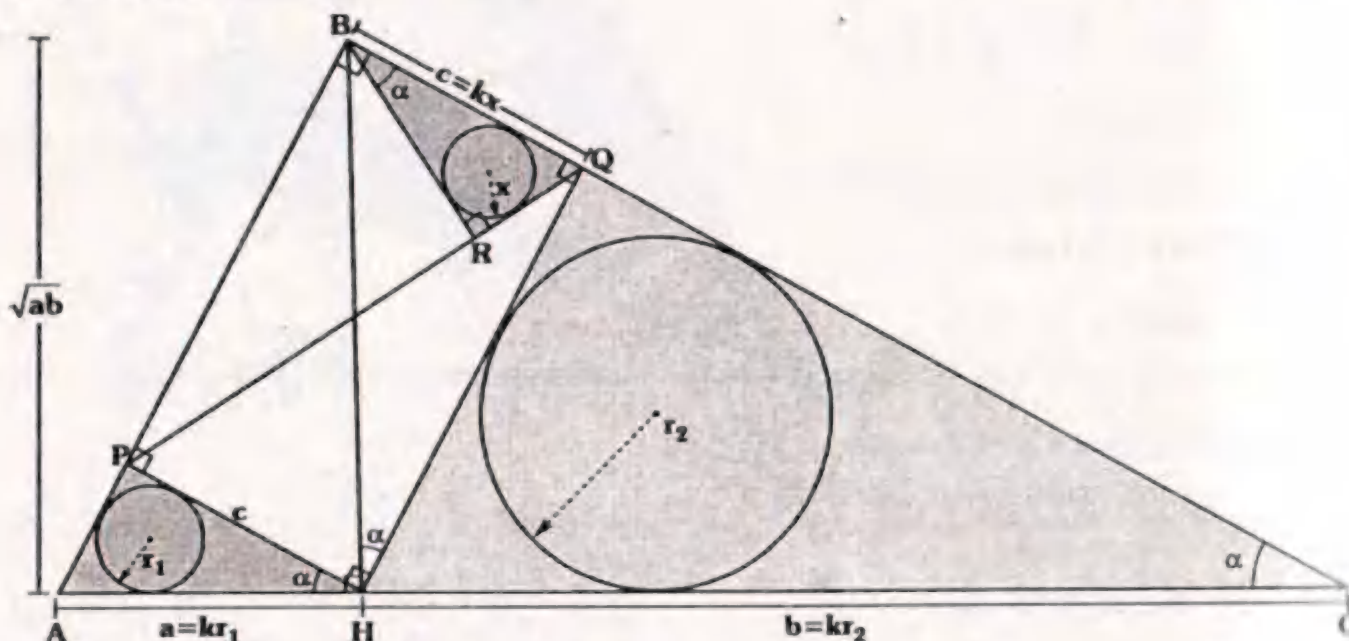
- Como  $\overline{QN}$  es diámetro

$$\therefore x = 90^\circ$$



**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 239**



Nos piden  $x$  en función de  $r_1$  y  $r_2$ .

- Notamos que:  $\triangle AHP \sim \triangle HQC \sim \triangle BQR \Rightarrow \frac{a}{r_1} = \frac{b}{r_2} = \frac{c}{x} \Rightarrow a = kr_1; b = kr_2; c = kx$
- En  $\triangle ABC$ :  $BH = \sqrt{ab}$
- Como  $HP = BQ = c$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ En } \triangle AHB: \frac{1}{c^2} &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{(\sqrt{ab})^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_1 r_2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_1 r_2} \quad \therefore x = r_1 \sqrt{\frac{r_2}{r_1 + r_2}} \end{aligned}$$

**Clave** A**RESOLUCIÓN N° 240**

Sea  $\vec{\mathcal{L}}$  la recta de Euler del  $\triangle ABC$ .

Nos piden  $x$ ; dato:  $a+c=2b$

- Como  $\triangle ABC \sim \triangle MHN$

$$\Rightarrow \frac{BQ}{a+b+c} = \frac{h}{b} \Rightarrow \frac{BQ}{3b} = \frac{h}{b}$$

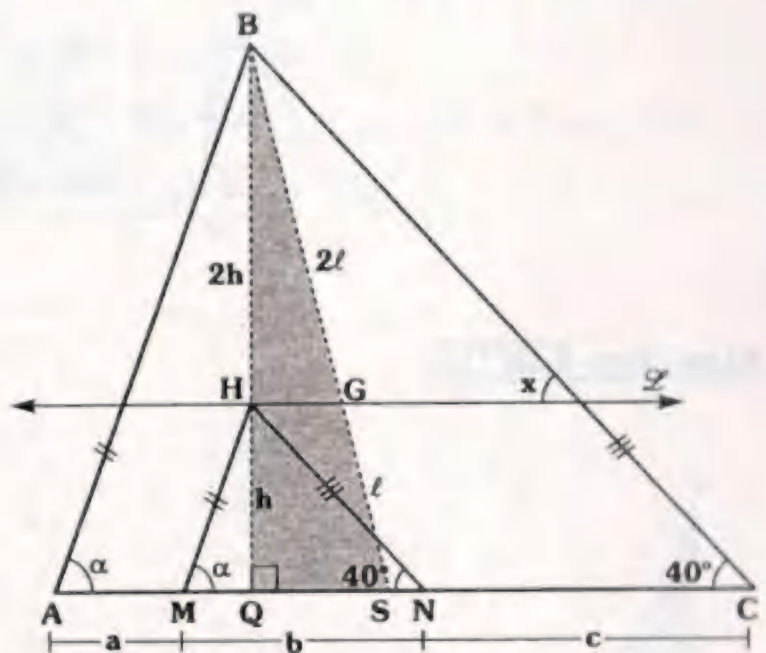
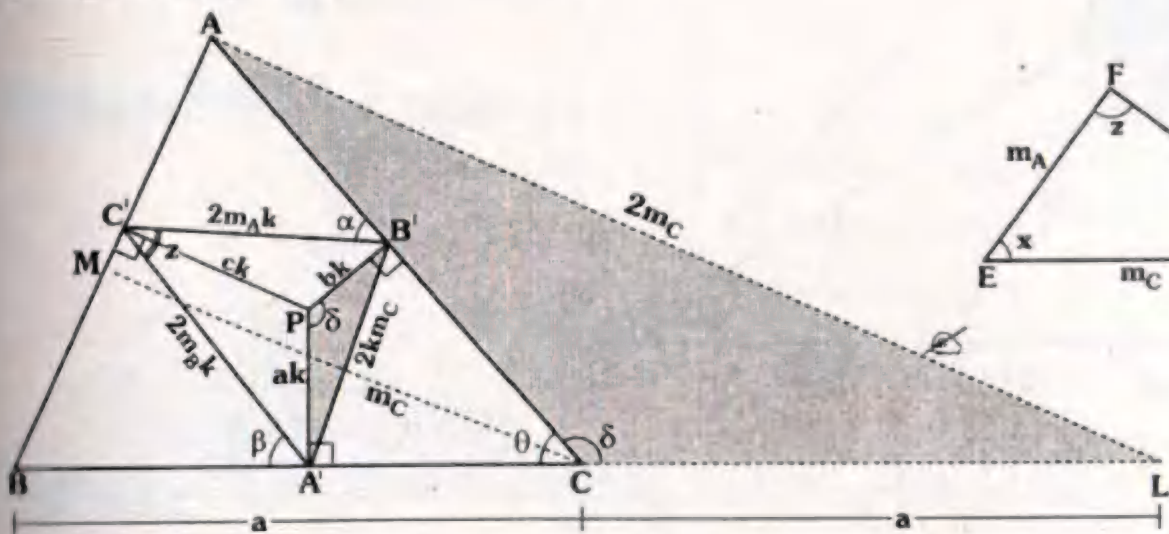
$$\Rightarrow BQ=3h \Rightarrow BH=2h$$

- Donde  $H$  y  $G$  son ortocentro y baricentro del  $\triangle ABC$ .

- Como  $BG=2(GS)$  y  $BH=2(HQ)$

$$\Rightarrow \overline{HG} \parallel \overline{AC} \Rightarrow \vec{\mathcal{L}} \parallel \overline{AC}$$

$$\therefore x = 40^\circ$$

**Clave** C**RESOLUCIÓN N° 241**

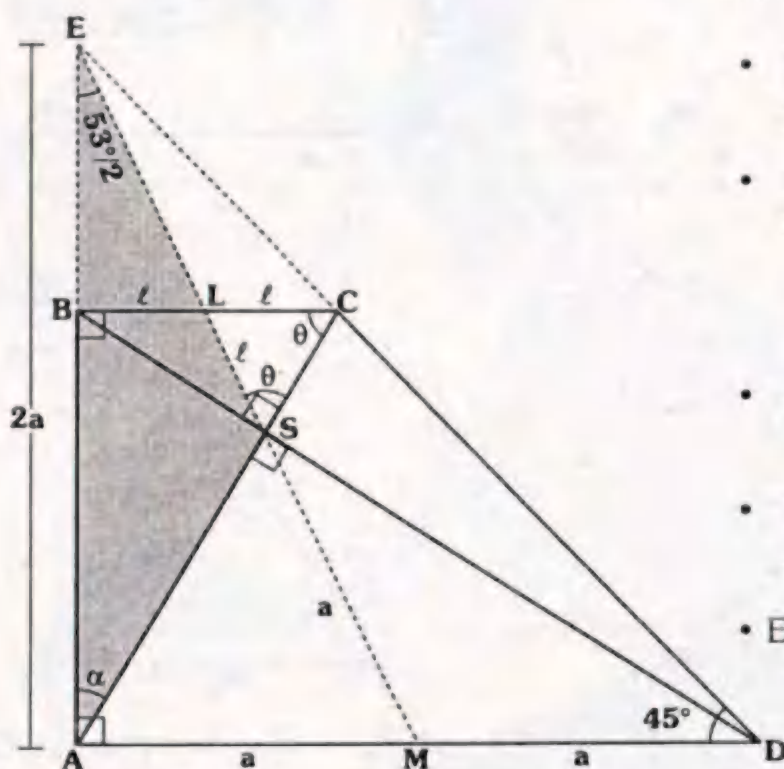


Nos piden  $x+y$ .

- Sea M punto medio de  $\overline{AB}$ ,  $CL=a \Rightarrow CM=m_C$  y en el  $\triangle ABL$  por base media  $AL=2m_C$
- Como el  $\triangle A'PB'C$  es inscriptible  $\Rightarrow m\angle ACL = m\angle A'PB' = \delta$
- Luego  $\triangle LCP \sim \triangle A'PB'$  (2do caso)  $\Rightarrow A'C' = 2(m_C)k$
- Análogamente:  $A'C' = 2(m_B)k$  y  $B'C' = 2(m_A)k$   
 $\Rightarrow \triangle A'B'C' \sim \triangle GEF \Rightarrow m\angle EFG = z$
- Como  $\alpha + \beta = z + \theta$  y  $x+y+z=180^\circ \Rightarrow x+y=180^\circ - (\alpha + \beta - \theta)$   
 $\therefore x+y = 180^\circ + \theta - \alpha - \beta$

**Clave** 

**RESOLUCIÓN N° 242**



Nos piden  $\theta - \alpha$ .


- Prolongamos  $\overline{AB}$  y  $\overline{DC}$  hasta que se corten en E.
- En  $\triangle EAD$ : por propiedad del teorema de Ceva,

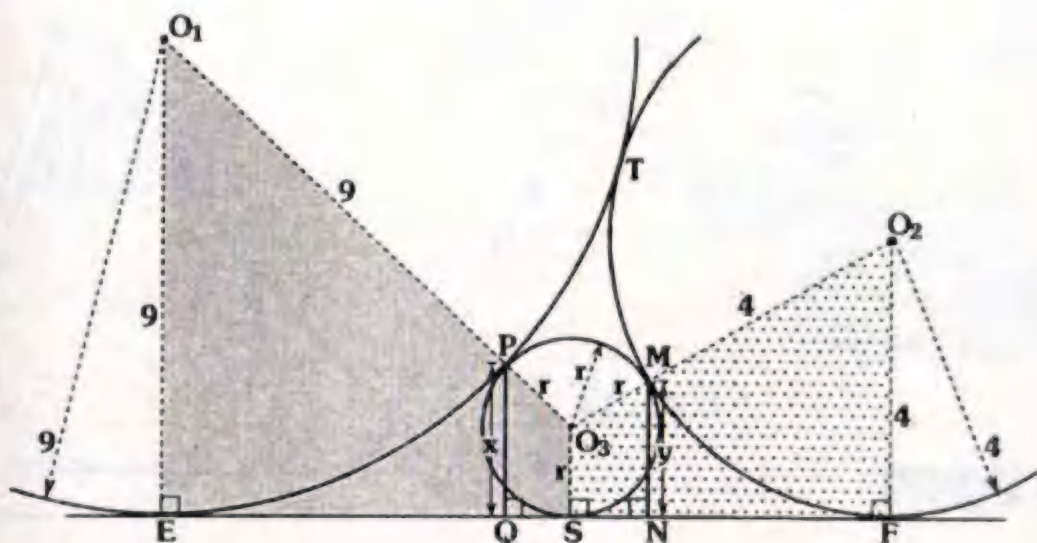
$$AM=MD \text{ y } BL=LC$$

- $\triangle AME$ : notable de  $\frac{53^\circ}{2}$
- En  $\triangle BSC$ , como  $\overline{SL}$  es mediana  $\Rightarrow m\angle LSC = \theta$
- En  $\triangle AES$ :

$$\theta = \alpha + \frac{53^\circ}{2}$$

$$\therefore \theta - \alpha = 26,5^\circ$$

**Clave** 

**RESOLUCIÓN N° 243**

Nos piden  $x/y$ .

- En los trapecios  $O_1ESO_3$  y  $O_2FSO_3$

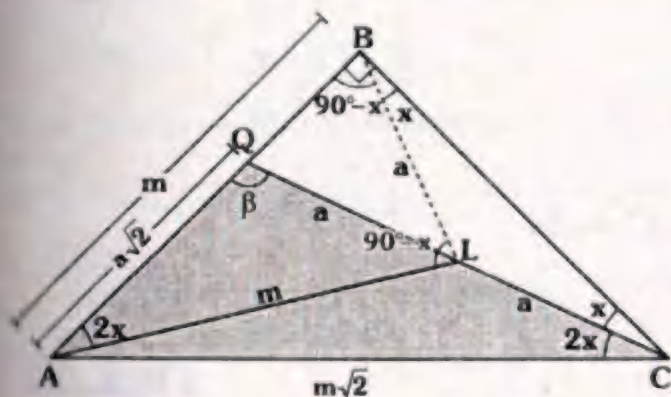
$$x = \frac{9r+r^9}{r+9} \quad y = \frac{4r+r^4}{4+r} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{9(4+r)}{4(9+r)} \quad \dots(I)$$

- Propiedad:

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \Rightarrow r = \frac{36}{25}$$

- Reemplazando en (I):

$$\frac{x}{y} = \frac{34}{29}$$

Clave **E****RESOLUCIÓN N° 244**

Nos piden x.

- Como  $QL=LC \Rightarrow BL=a$
- En  $\triangle AQC$ :

$$(AQ)^2 = (QL)(QC) \Rightarrow AQ = a\sqrt{2}$$

- Como  $\triangle AQL \sim \triangle CQL \Rightarrow \frac{AL}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}}$

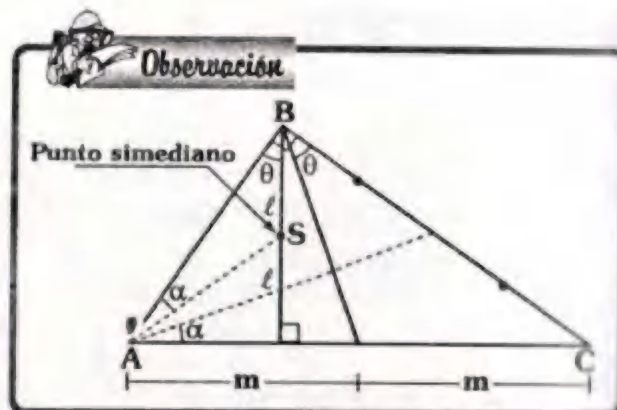
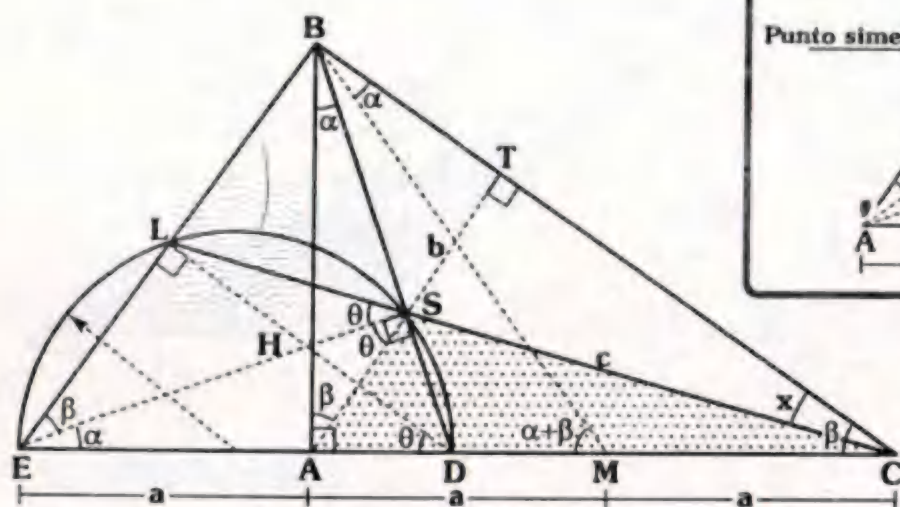








RESOLUCIÓN N° 249



Nos piden  $\text{sen } x$

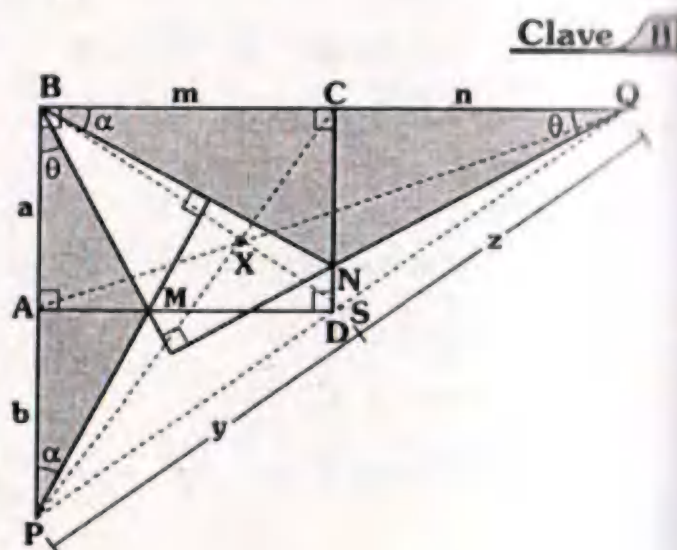
- De la observación:  $\overline{AS} \perp \overline{BS}$  y  $AS = ST$
- Para el  $\triangle BAC$ ,  $\overline{BM}$  es mediana  $\Rightarrow m\angle DBA = m\angle MBC = \alpha$
- H: ortocentro del  $\triangle EBD \Rightarrow m\angle ASE = m\angle ESL = \theta$   
 $\triangle EBM$ : isósceles  $\Rightarrow EA = AM = MC = a$
- $\triangle ASC$  por teorema de la bisectriz exterior:  $\frac{b}{c} = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$
- En  $\triangle STC$ :  $\text{sen } x = \frac{b}{c} = \frac{1}{3}$

RESOLUCIÓN N° 250

Nos piden  $y/z$  en función de  $a$  y  $b$ .

- En  $\triangle PBQ$ : teorema de Ceva

$$ya_n = zmb \Rightarrow \frac{y}{z} = \left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{m}{n}\right) \dots (I)$$

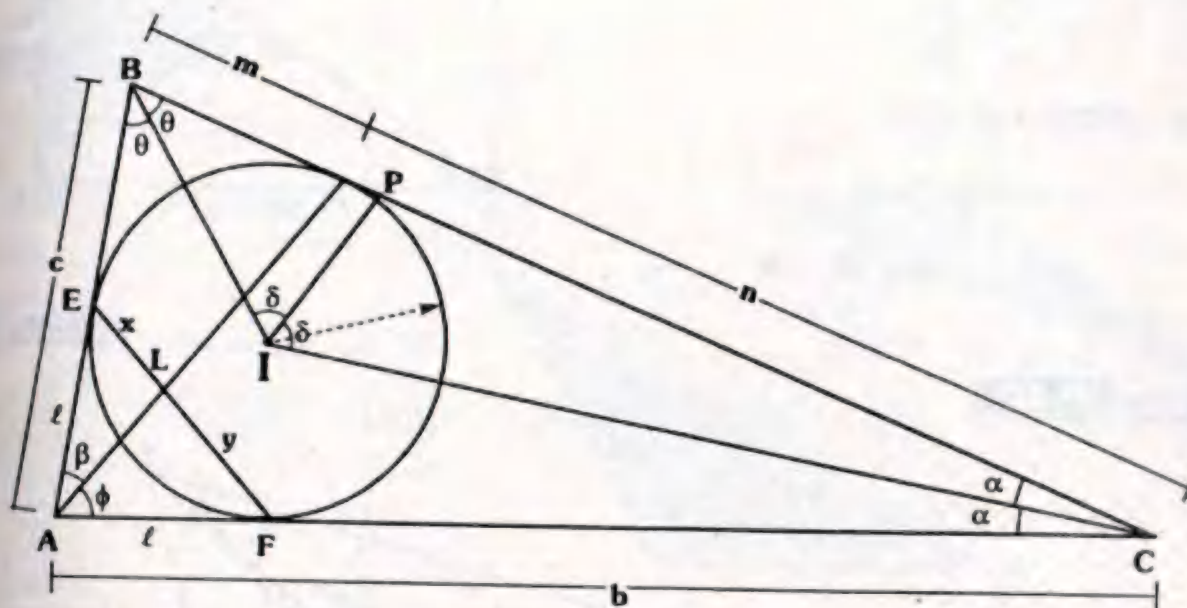


$$\bullet \triangle PBM \sim \triangle PQN \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{b}{a} \dots (II)$$

$$\bullet \text{ De (I) y (II): } \therefore \frac{y}{z} = \left( \frac{b}{a} \right)^2$$

Clave **D**

**RESOLUCIÓN N° 251**



Nos piden  $x/y$  en función de  $\theta + \alpha$ .

• En  $\triangle AEF$  y  $\triangle ABC$ , usemos el teorema (pág. 36)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\text{sen} \beta}{\text{sen} \phi} = \frac{x \ell}{y \ell} \\ \frac{\text{sen} \beta}{\text{sen} \phi} = \frac{mb}{nc} \end{array} \right\} \frac{x}{y} = \frac{m}{n} \cdot \frac{b}{c} \dots (I)$$

$$\bullet \text{ En } \triangle BIC: \frac{m}{n} = \frac{BI}{IC} = \frac{\text{sen} \alpha}{\text{sen} \theta} \dots (II)$$

$$\bullet \text{ En } \triangle ABC: \frac{b}{c} = \frac{\text{sen} 2\theta}{\text{sen} 2\alpha} \dots (III)$$

• De (I), (II) y (III):

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{\cos \theta}{\cos \alpha}$$

Clave **B**



**RESOLUCIÓN N° 252**

Nos piden  $x$ .

- Nos damos cuenta que:  $\triangle BPO \sim \triangle ODQ$

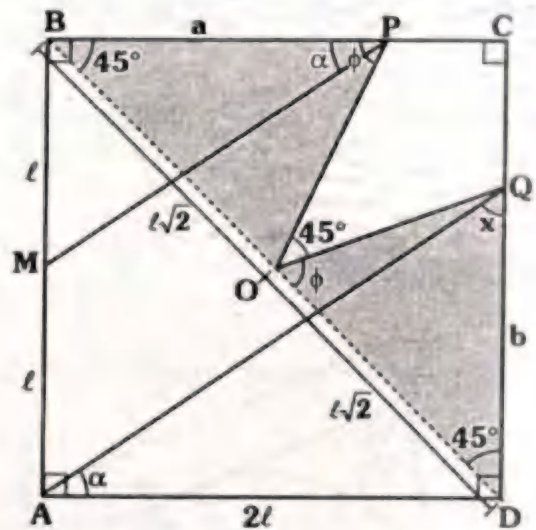
$$\Rightarrow \frac{\ell\sqrt{2}}{a} = \frac{b}{\ell\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\ell}{a} = \frac{b}{2\ell}$$

- Luego  $\angle MBP \sim \angle QDA$

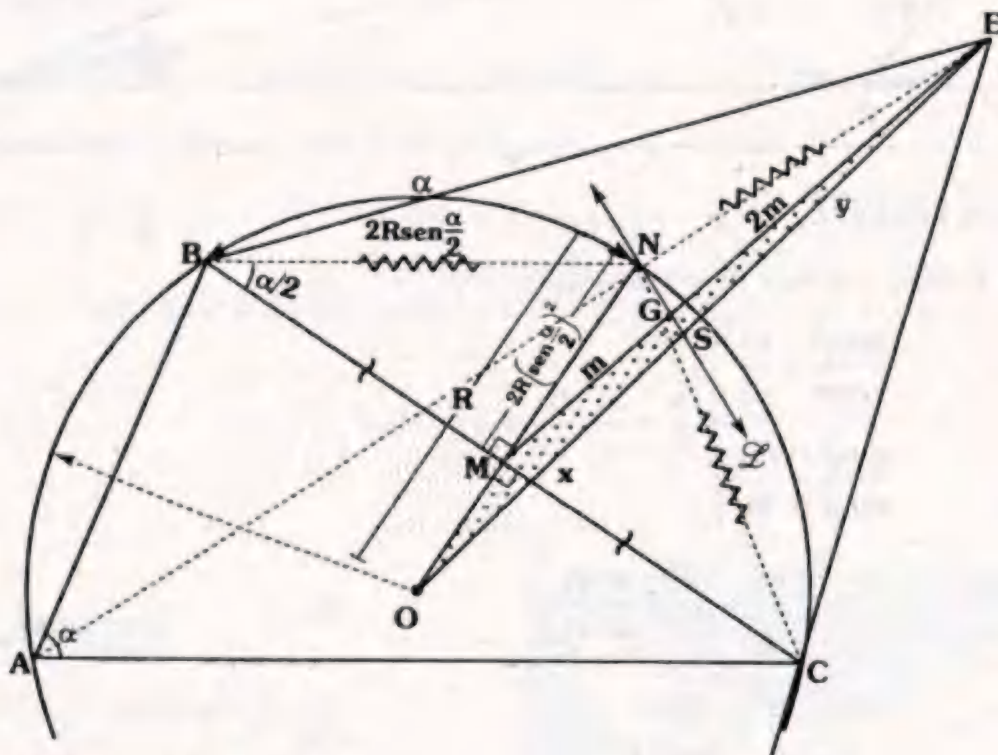
$$\Rightarrow m\angle QAD = \alpha$$

$$\therefore x = 90^\circ - \alpha$$



**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 253**



Nos piden  $x/y$  en función de  $\alpha$ .

- Donde  $\mathcal{L}$  es la recta de Euler.
- Se sabe que N es circuncentro del  $\triangle BEC$ .
- Sea G baricentro del  $\triangle BEC$  ( $BM=MC$  y  $EG=2(GM)$ ).

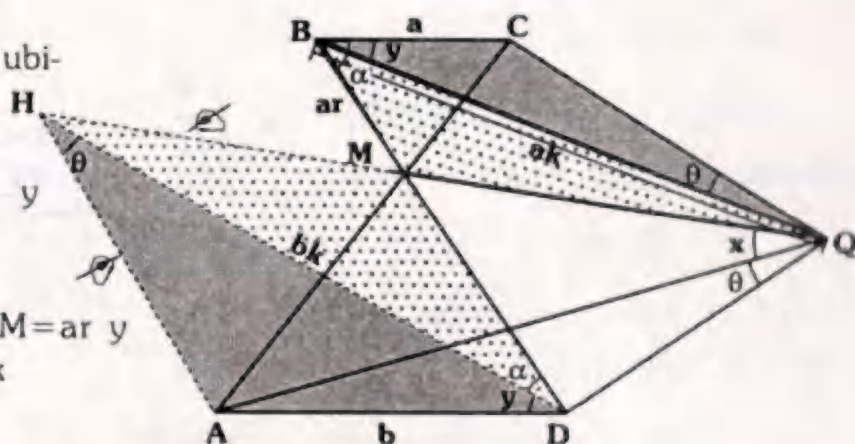
- En  $\triangle OME$ , por teorema de Menelao, ( $\overleftrightarrow{L}$  es la recta secante).

$$x(2m) \left( 2R \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) = ymR$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{1}{4} \csc^2 \frac{\alpha}{2}$$

Clave **A****RESOLUCIÓN N° 254**

- Por demostrar que  $x=y$ .
- En la prolongación de  $\overline{QM}$  se ubica  $H$  tal que:  
 $\overline{DH} \parallel \overline{QB} \Rightarrow \triangle DMH \sim \triangle BMC$  y  
 $\triangle BMC \sim \triangle DMC$
- Sea  $BC=a$  y  $AD=b \Rightarrow BM=ar$  y  
 $MD=br \Rightarrow BQ=ak$  y  $HD=bk$

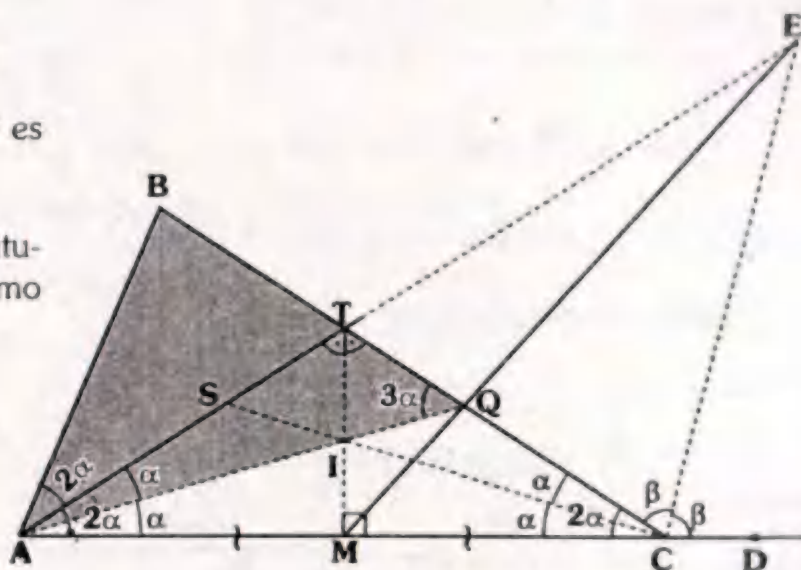


- Luego:  
 $\triangle HDA \sim \triangle QBC \Rightarrow m\angle AHD = \theta$
- Como  $\triangle AHQD$  es inscriptible:  $\therefore x=y$

**RESOLUCIÓN N° 255**

Nos piden demostrar que  $AB=BQ$

- Sea  $\overline{AE} \cap \overline{BC} = \{T\} \Rightarrow \triangle ATC$  es isósceles, luego  $\overline{TM} \perp \overline{AC}$
- Sabemos que  $A, S, T$  y  $E$  constituyen una cuaterna armónica como  
 $m\angle DCE = m\angle ECB$   
 $\Rightarrow m\angle BCS = m\angle SCA$
- Luego  $I$  es incentro del  $\triangle ATC$   
 $\Rightarrow m\angle CAQ = m\angle QAT = \alpha$





- Notamos que:  $m\angle BAQ = m\angle AQB = 3\alpha$   
 $\therefore AB = BQ$

**RESOLUCIÓN N° 256**

Nos piden  $x$ .

- Debido a que  $M$ ,  $G$  y  $N$  son baricentro de los triángulos  $APB$ ,  $ABC$  y  $BQC$

$$\Rightarrow BM = 2(ME), BG = 2(GL) \text{ y}$$

$$BN = 2(NF) \Rightarrow \overline{MG} \parallel \overline{EL} \text{ y}$$

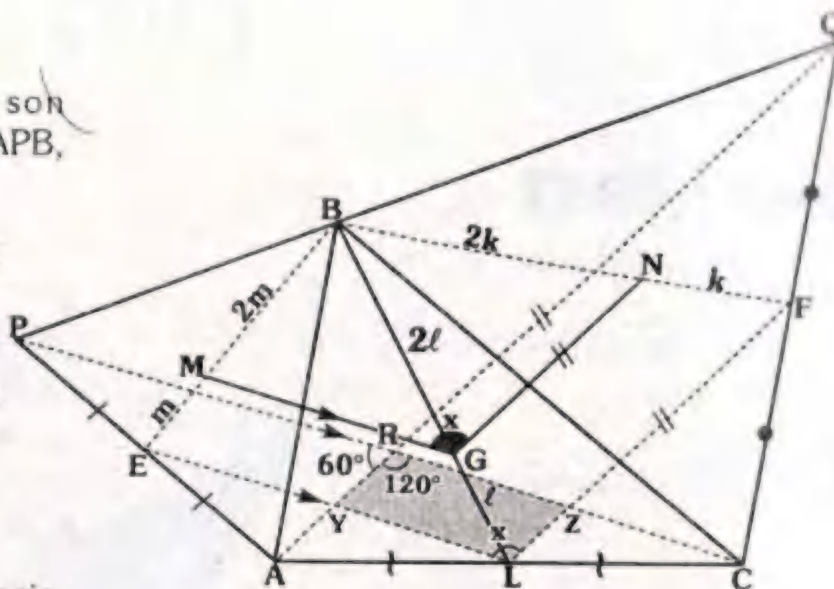
$$\overline{GN} \parallel \overline{LF} \Rightarrow m\angle ELF = x$$

- Por base media:

$$\overline{EL} \parallel \overline{PC} \text{ y } \overline{LF} \parallel \overline{AQ}$$

- Por propiedad de congruencia  $AQ = PC$  y  $m\angle ARP = 60^\circ$

- Como  $YRZL$  es un paralelogramo:  $x = 120^\circ$



**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 257**

Nos piden  $x$ .

- Ubiquemos  $Q$  tal que  $PQ = a$  y  $SQ = b$

- Como:

$$a^2 = (PL)(PD) \Rightarrow m\angle QBP = m\angle LQP = \alpha$$

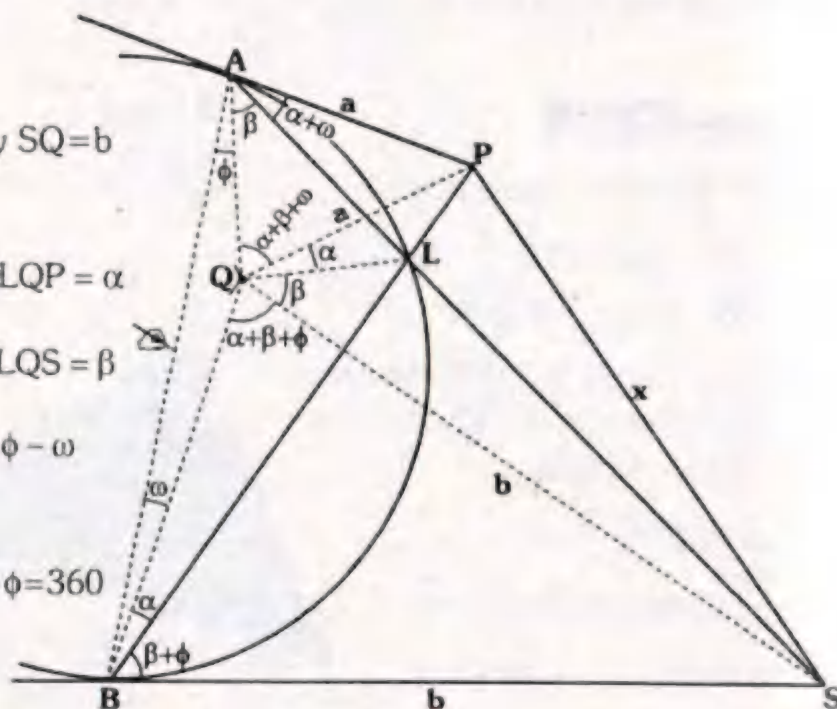
$$b^2 = (TL)(TA) \Rightarrow m\angle QAS = m\angle LQS = \beta$$

- En  $\triangle BQA$ :  $m\angle AQB = 180^\circ - \phi - \omega$

- En  $Q$ :

$$\underbrace{180^\circ - \phi - \omega + \alpha + \beta + \omega + \alpha + \beta + \alpha + \beta + \phi}_{m\angle AQB} = 360$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 60^\circ$$



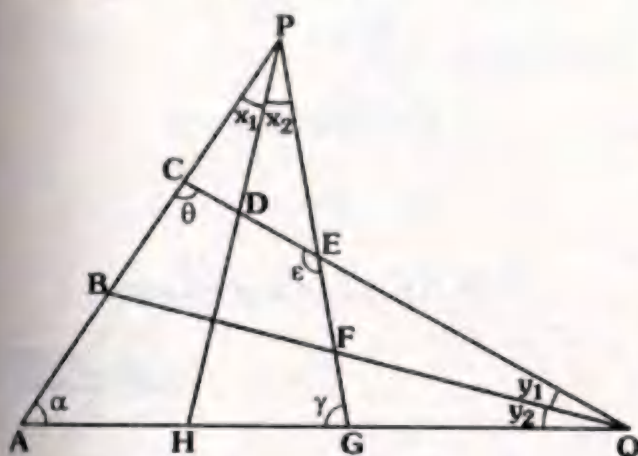
- En  $\triangle PQS$ :

$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 60^\circ$$

$$\therefore x = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$$

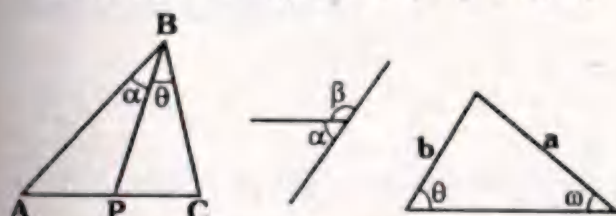
**Clave D**

### RESOLUCIÓN N° 258



Nos piden:  $\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FG} \cdot \frac{GH}{HA}$

- Usaremos las siguientes propiedades:



$$\frac{\sin \alpha}{\sin \theta} = \frac{AP \cdot BC}{PC \cdot AB}; \quad \sin \alpha = \sin \beta; \quad \frac{a}{b} = \frac{\sin \theta}{\sin \omega}$$

- En  $\triangle APG$  y  $\triangle PCE$

$$\frac{\sin x_1}{\sin x_2} = \frac{AH \cdot PG}{HG \cdot AP} = \frac{CD \cdot PE}{DE \cdot CP}$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{DE} \cdot \frac{HG}{AH} = \frac{CP}{PE} \cdot \frac{PG}{AP}$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{DE} \cdot \frac{GH}{HA} = \frac{\sin \epsilon}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \quad \dots (I)$$

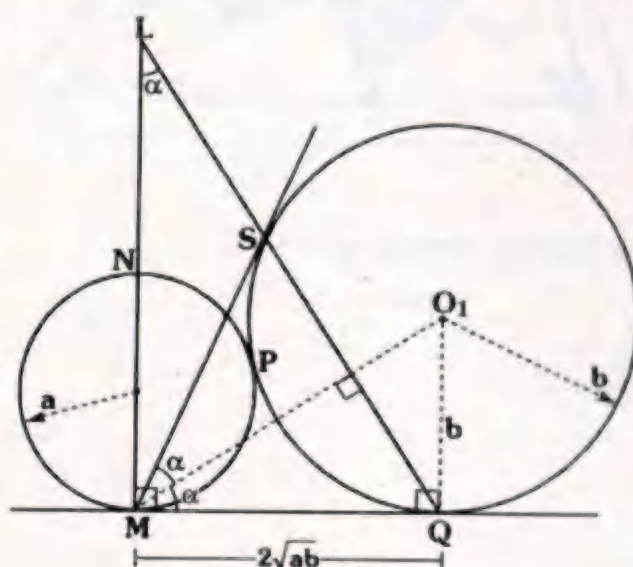
- Análogamente para  $y_1$  e  $y_2$  en los triángulos CQA y EQG:

$$\Rightarrow \frac{EF}{FG} \cdot \frac{AB}{BC} = \frac{\sin \gamma}{\sin \epsilon} \cdot \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} \quad \dots (II)$$

- De (I) y (II):

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{EF}{FG} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{GH}{HA} = 1$$

### RESOLUCIÓN N° 259



- Nos piden  $MN/NL$ .

- Tenemos que  $MN = 2a$
- Por propiedad de circunferencia:

$$MQ = 2\sqrt{ab}$$

- $\triangle MQO_1 \sim \triangle LMQ$

$$\frac{b}{2\sqrt{ab}} = \frac{2\sqrt{ab}}{ML} \Rightarrow ML = 4a$$

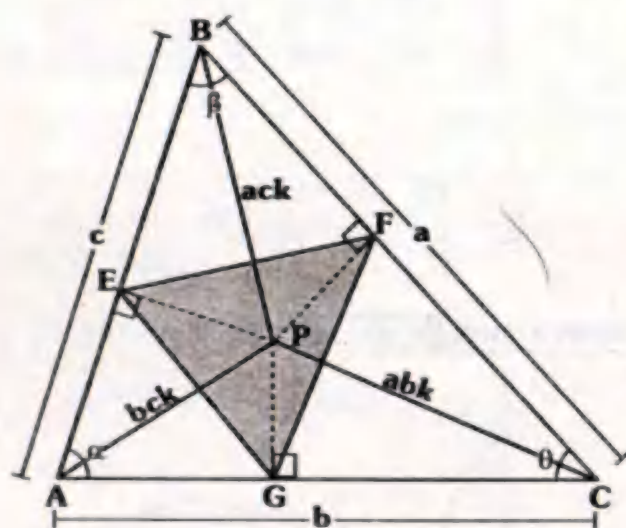
- Como  $ML = 4a \Rightarrow LN = 2a$

$$\therefore \frac{MN}{NL} = 1$$

**Clave E**



**RESOLUCIÓN N° 260**



Nos piden analizar el  $\triangle EFG$ .

- Las características del punto de Apolonio, hacen que:

$$AP = bck, PC = abk \text{ y } BP = ack$$

- En  $\triangle APEG$ :

$$EG = bck \underbrace{\sin \alpha}_{am} \Rightarrow EG = abc(km)$$

- Análogamente:

$$EF = (abc)(km) \text{ y}$$

$$GF = (abc)km$$

$\therefore$  El  $\triangle EFG$  es equilátero

**Clave** E

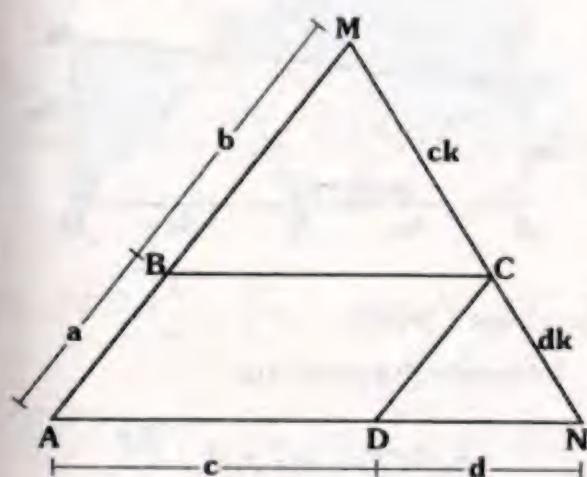




# Solucionario

## Ciclo Repaso

### RESOLUCIÓN N° 261



Nos piden la relación entre  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ .

• Por teorema de Tales:

$$* MC = ck \text{ y } CN = dk$$

$$* \frac{a}{b} = \frac{d}{c}$$

$$\therefore ac = bd$$

Clave **E**

### RESOLUCIÓN N° 262

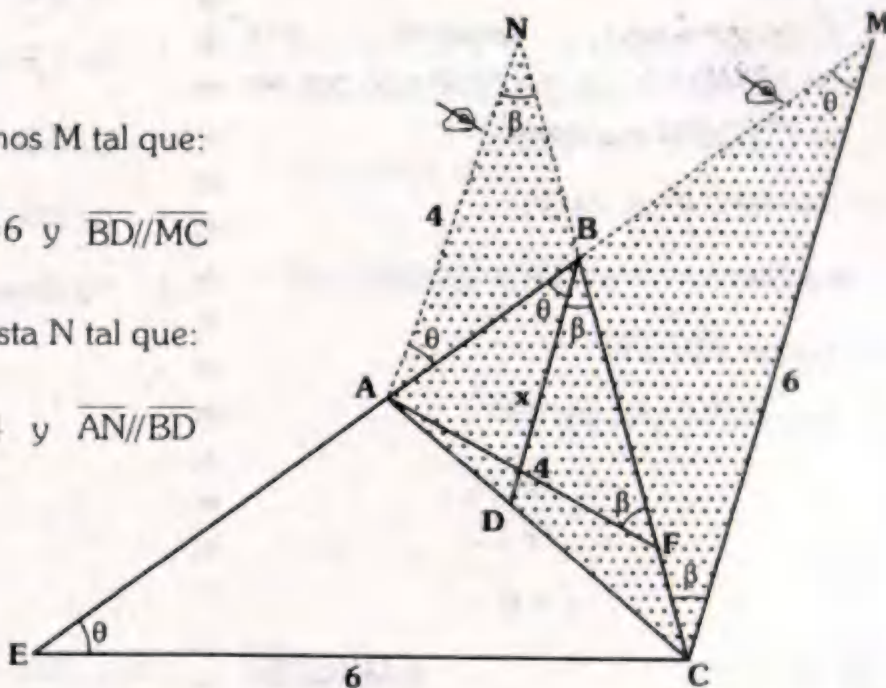
Nos piden  $x$ .

• Prolongamos  $\overline{AB}$  y ubicamos  $M$  tal que:

$$m\angle BMC = \theta \Rightarrow EC = CM = 6 \text{ y } \overline{BD} \parallel \overline{MC}$$

• Luego, se prolonga  $\overline{CB}$  hasta  $N$  tal que:

$$m\angle BNA = \beta \Rightarrow AN = AF = 4 \text{ y } \overline{AN} \parallel \overline{BD}$$

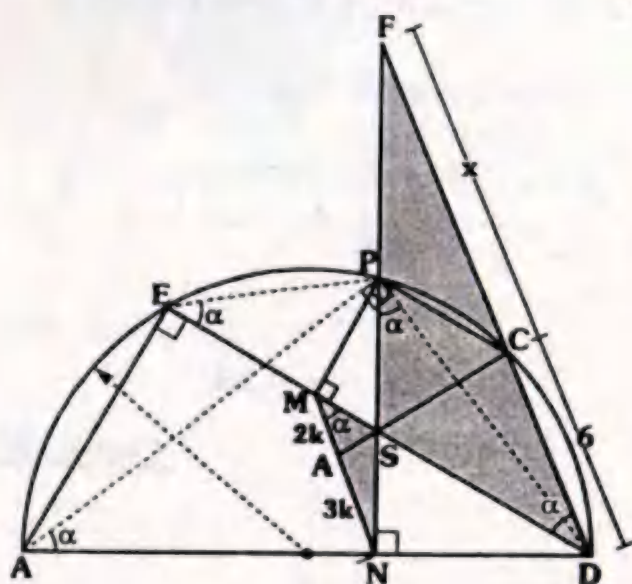




- Finalmente, como  $\overline{AN} \parallel \overline{BD} \parallel \overline{CM}$ :

$$x = \frac{(6)(4)}{(6+4)}$$

$$\therefore x = 2, 4$$

Clave  C**RESOLUCIÓN N° 263**

Nos piden x.

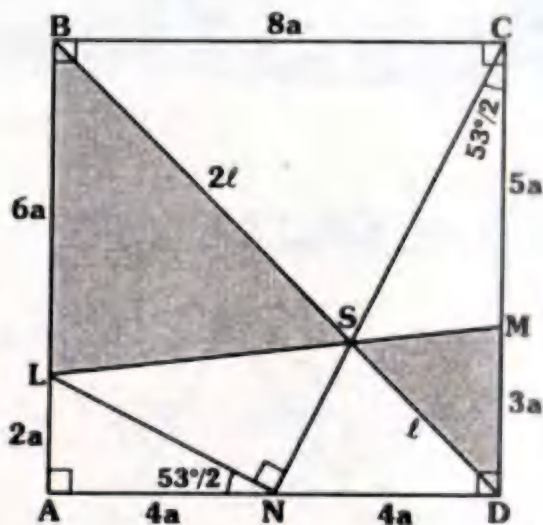
- Completamos ángulos, sea  $m\angle NMD = \alpha \Rightarrow m\angle NPD = \alpha$ , por ser el  $\triangle NMPD$  inscriptible.
- También en el  $\triangle APD$ :  

$$m\angle PAD = \alpha \Rightarrow m\angle PED = m\angle EDC = \alpha$$
- Luego  $\overline{MN} \parallel \overline{FD}$
- Como  $\triangle MSN \sim \triangle DSF$

$$\frac{x}{6} = \frac{3K}{2K}$$

$$\therefore x = 9$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 264**

Nos piden CM/MD.

- Notemos primero que:

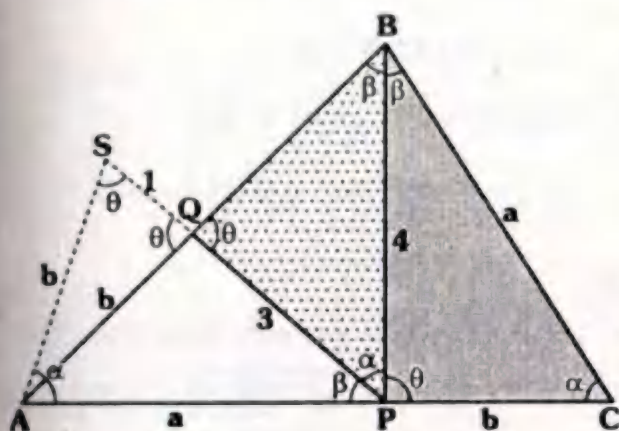
$$m\angle NCD = m\angle ANL = \frac{53^\circ}{2}$$

- $\triangle LAN$ : sea  $AL=2a$   
 $\Rightarrow AN=4a$ , como  $AN=ND=4a$   
 $\Rightarrow DC=AB=8a$   
 $\Rightarrow LB=6a$
- $\triangle NSD \sim \triangle CSD \Rightarrow BS=2(SD)$
- $\triangle LSB \sim \triangle MSD \Rightarrow MD=3a \Rightarrow CM=5a$
- Finalmente:

$$\frac{CM}{MD} = \frac{5a}{3a}$$

$$\therefore \frac{CM}{MD} = \frac{5}{3}$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 265**

Nos piden  $\frac{BC}{PC} = \frac{a}{b}$ .

- Se ubica "S" en la prolongación de  $\overline{PQ}$  tal que:

$$m\angle SAP = m\angle BCA = \alpha$$

$$\Rightarrow \triangle SAP \equiv \triangle PCB \text{ (LAL)}$$

$$\Rightarrow m\angle ASP = m\angle BPC = \theta \text{ y}$$

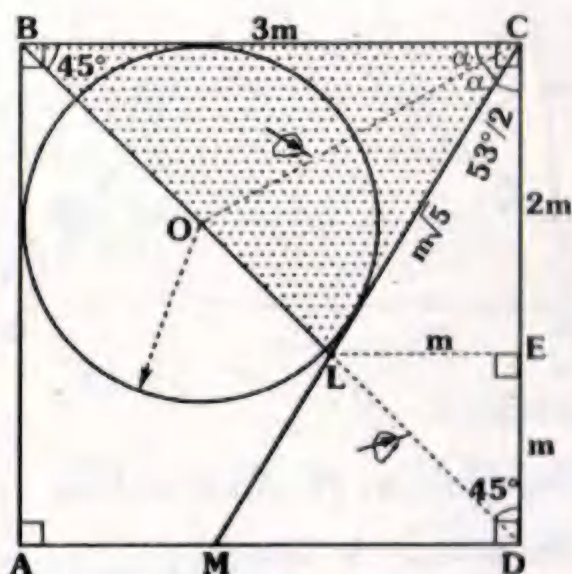
$$AS = PC = b$$

- $\triangle ASQ$ : isósceles

$$\Rightarrow m\angle AQS = \theta$$

- $\triangle PQB \sim \triangle CPB$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{4}{3}$$

**Clave B****RESOLUCIÓN N° 266**

Piden  $\frac{BQ}{QL}$ .

- Como  $AM = MD \Rightarrow m\angle MCD = \frac{53^\circ}{2}$

- La prolongación de  $\overline{BL}$  llega a D.

- En  $\triangle LCD$ , se traza la altura  $\overline{LE} \Rightarrow \angle LED$  es notable de  $45^\circ$  y  $\angle LEC$  es notable de  $\frac{53^\circ}{2}$

- En  $\triangle BCL$ , por teorema de la bisectriz:

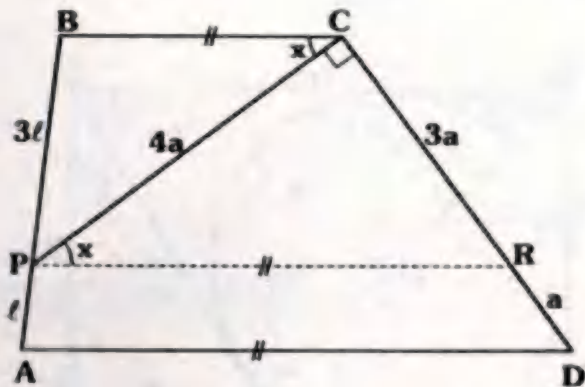
$$\frac{BQ}{QL} = \frac{3m}{m\sqrt{5}}$$

$$\therefore \frac{BQ}{QL} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

**Clave C**



**RESOLUCIÓN N° 267**



Nos piden  $x$ .

- Por P se traza  $\overline{PR} \parallel \overline{AD}$  (R en  $\overline{CD}$ )
- Por teorema de Tales.

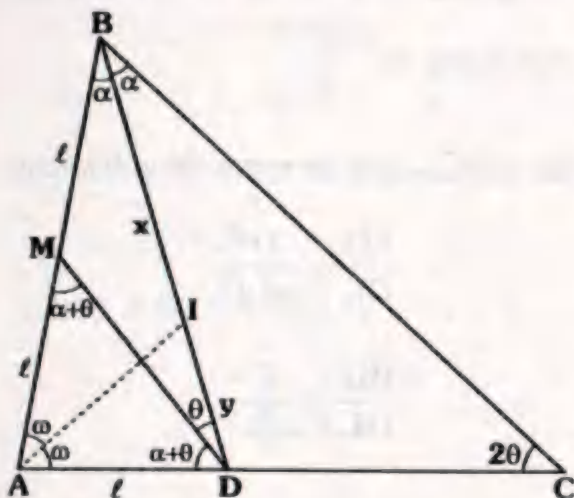
$$\frac{BP}{PA} = \frac{CR}{RD} \Rightarrow CR = 3a \text{ y } RD = a$$

- Como  $PC = CD = 4a \Rightarrow \triangle PCR$  es notable pues  $PG = 4a$  y  $CR = 3a$

$$\therefore x = 37^\circ$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 268**



Nos piden  $x/y$ .

Del dato:

$$m\angle ACB = 2(\underbrace{m\angle MDB}_{\theta})$$

$$\Rightarrow m\angle ACB = 2\theta$$

- Deducimos fácilmente que:

$$m\angle AMD = m\angle ADM = \alpha + \theta$$

$$\Rightarrow AM = AD = \ell$$

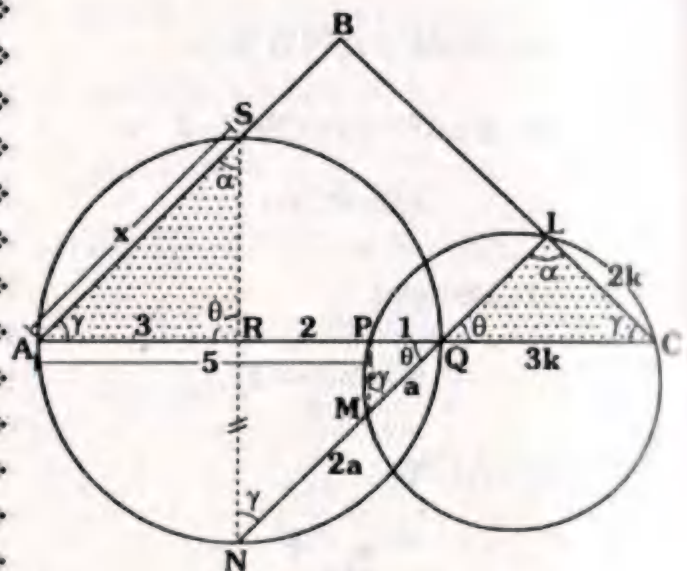
- En  $\triangle ABD$ , por teorema de la bisectriz:

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2\ell}{\ell}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = 2$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 269**



Nos piden  $x$ .

- Al trazar  $\overline{NS}$  nos damos cuenta que:

$$\overline{NS} \parallel \overline{MP}$$

- En  $\triangle NRQ$ :

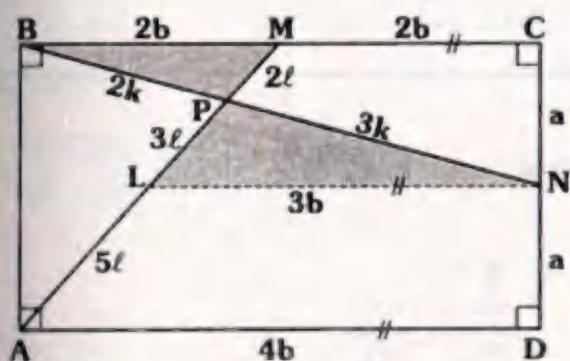
$$\overline{NR} // \overline{MP} \Rightarrow RP=2, \text{ luego } AR=3$$

$$\triangle RAS \sim \triangle LCQ \Rightarrow \frac{x}{3k} = \frac{3}{2k}$$

$$\therefore x = \frac{9}{2}$$

**Clave C**

### RESOLUCIÓN N° 270



Piden  $PM + PN$ .

$$\text{Dato: } AM = 2\sqrt{2} \text{ y } BN = \sqrt{17}$$

- Halle las razones de los segmentos AP con PM y BP con PN.

- Sea L punto medio de  $\overline{AM} \Rightarrow \overline{LN}$  es base media del trapecio AMCD, sea;

$$AD=4b \text{ y } MC=2b \Rightarrow LN=3b$$

- Como  $\triangle BPM \sim \triangle NPL$

$$BP=2k \text{ y } PN=3k$$

$$\Rightarrow PN = \frac{3}{5} BN \quad \dots(I)$$

- También:

$$LP = 3\ell, PM = 2\ell \text{ y } AL = 5\ell$$

$$\Rightarrow PM = \frac{2}{10} AM = \frac{1}{5} AM \quad \dots(II)$$

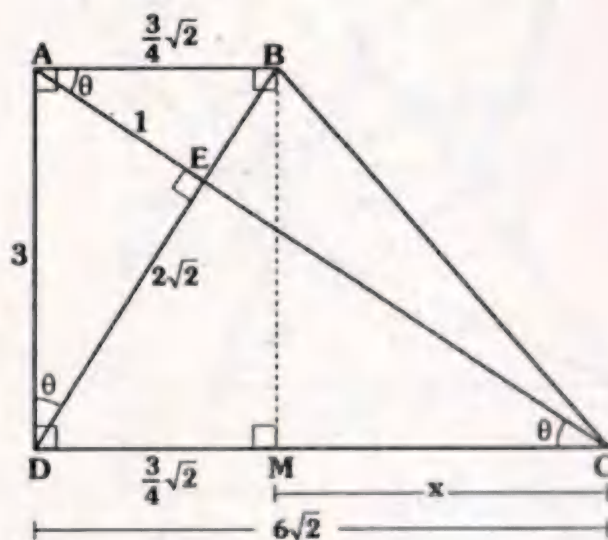
- De (I) y (II):

$$PN + PM = \frac{3}{5} \sqrt{17} + \frac{1}{5} (2\sqrt{2})$$

$$\therefore PN + PM = \frac{2\sqrt{2} + 3\sqrt{17}}{5}$$

**Clave D**

### RESOLUCIÓN N° 271



Nos piden  $x$ .

- En  $\triangle AED$ :  $ED = 2\sqrt{2}$

- $\triangle AED \sim \triangle DEC$ :  $DC = 6\sqrt{2}$

- $\triangle AEB \sim \triangle AED$ :  $AB = \frac{3}{4} \sqrt{2}$

- Como ABMD es un rectángulo



$$\Rightarrow DM = \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

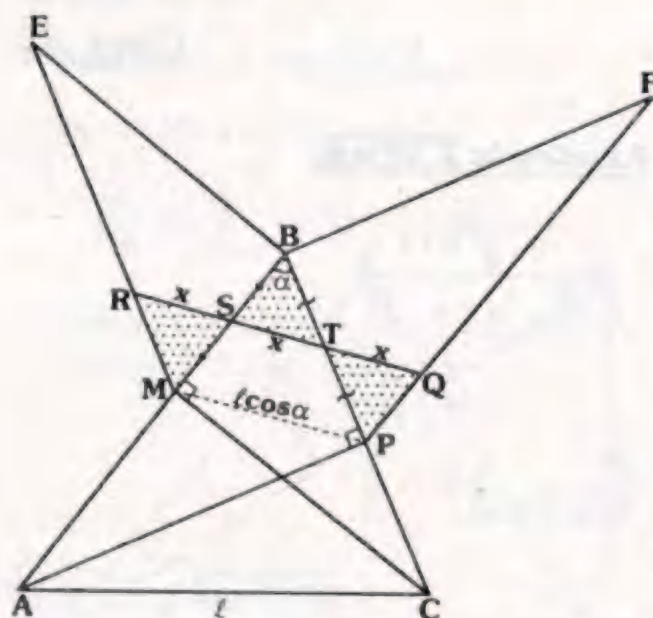
• Finalmente:

$$x + \frac{3}{4}\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

$$\therefore x = \frac{21}{4}\sqrt{2}$$

Clave A

### RESOLUCIÓN N° 272



Nos piden RQ.

- Como S y T son los centros de los paralelogramos: BCME y ABFP

$$\Rightarrow RS = ST = TQ = x$$

- Luego  $RQ = 3x$
- De la observación:

$$MP = l \cos \alpha$$

- En  $\triangle MBP$ , por base media:

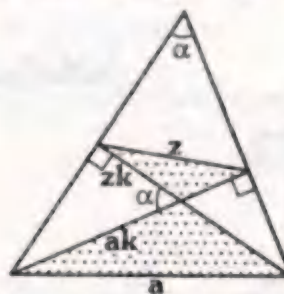
$$x = \frac{l}{2} \cos \alpha$$

$$\therefore RQ = \frac{3}{2} l \cos \alpha$$

Clave D



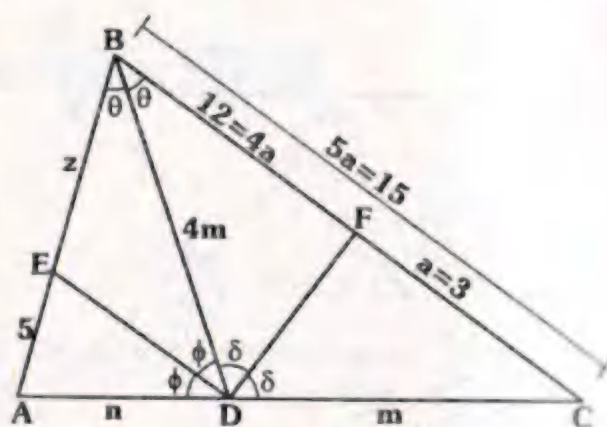
Observación



Se cumple:

$$z = a \cos \alpha$$

### RESOLUCIÓN N° 273



Nos piden AB.

- Sea  $EB = 7 \Rightarrow AB = z + 5$
- Como  $BF = 4(FC) \Rightarrow BD = 4m$

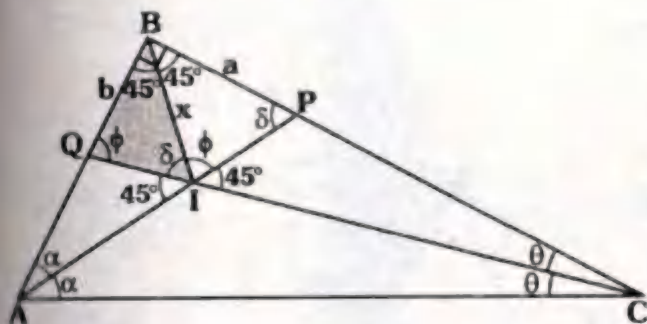
$$\left. \begin{array}{l} \text{En } \triangle ABC: \frac{m}{n} = \frac{15}{z+5} \\ \text{En } \triangle ADB: \frac{4m}{n} = \frac{z}{5} \end{array} \right\} 4 \left( \frac{15}{z+5} \right) = \frac{z}{5}$$

$$\Rightarrow z=15$$

$$\therefore AB = 20$$

**Clave E**

**RESOLUCIÓN N° 274**



Nos piden  $x$ .

• Dato:  $ab=8$

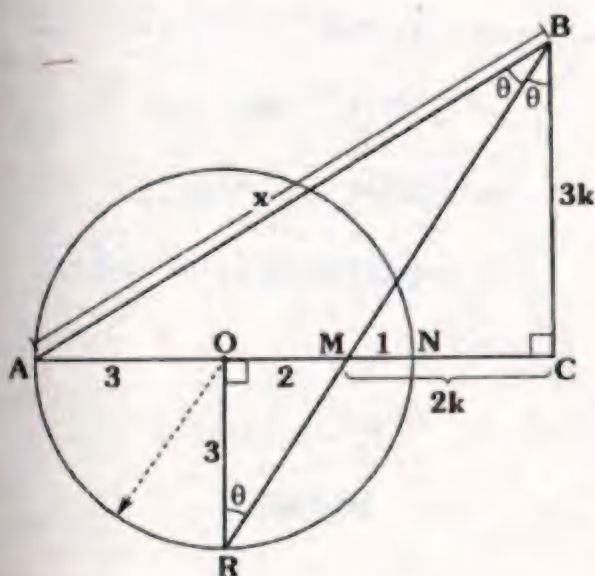
•  $\triangle QBI \sim \triangle IBP$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{b}{x} \Rightarrow x^2 = ab$$

$$\therefore x = 2\sqrt{2}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 275**



Nos piden  $x$ .

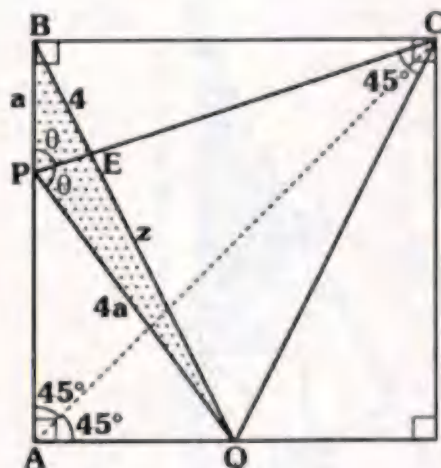
- $\triangle MOR \sim \triangle MCB \Rightarrow \frac{MC}{CB} = \frac{2}{3}$
- En  $\triangle ACB$ , por teorema de la bisectriz:

$$\frac{x}{5} = \frac{3k}{2k}$$

$$\therefore x = 7,5$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 276**



Piden BQ.

- Sea  $EQ=z \Rightarrow BQ=4+z$
- De la observación (propiedad de puntos notables): C es excentro del  $\triangle PAQ$   
 $\Rightarrow m\angle BPC = m\angle CPQ$
- En  $\triangle BPQ$ , por teorema de la bisectriz interior:

$$\frac{z}{4} = \frac{4}{z} \Rightarrow z = 16$$

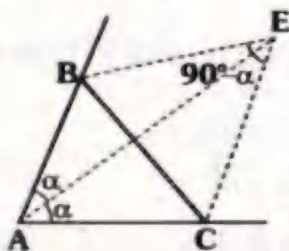
$$\therefore BQ = 20$$

**Clave C**



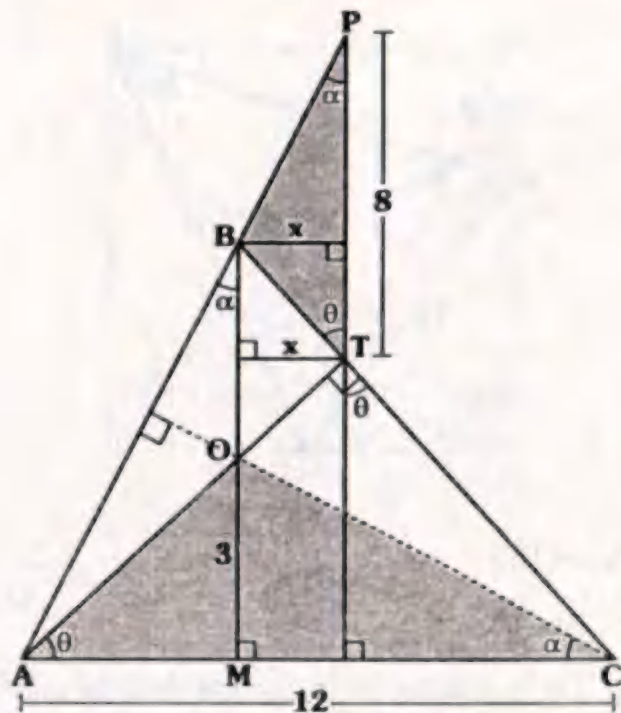


**Observación**



Se cumple que  
E es excentro  
del  $\triangle ABC$ .

**RESOLUCIÓN N° 277**



Nos piden x.

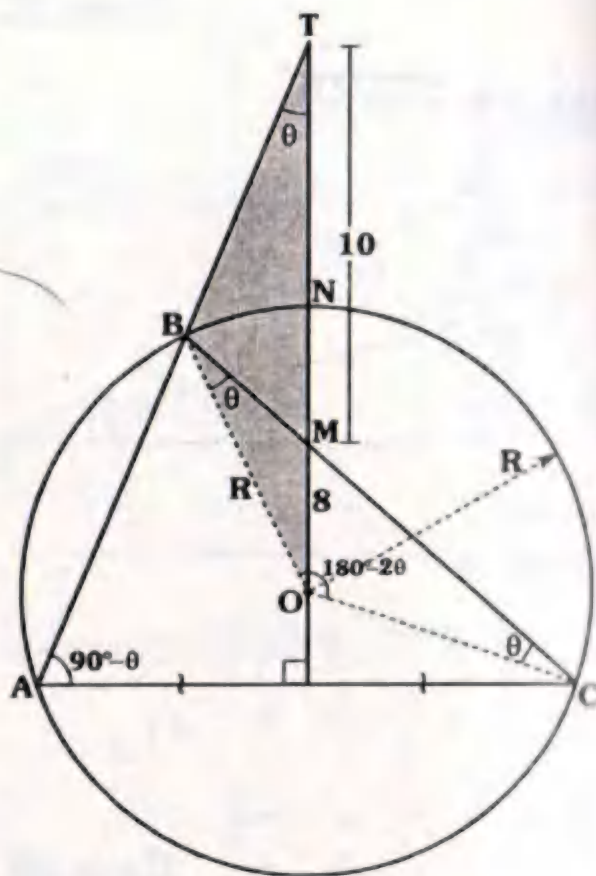
Notamos que  $\triangle AOC \sim \triangle TBP$ , comparamos elementos homólogos:

$$\frac{x}{3} = \frac{8}{12}$$

$$\therefore x = 2$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 278**



Piden R.

• Sea  $m\angle OBC = \theta$

$$\Rightarrow m\angle BOC = 180^\circ - 2\theta$$

$$\Rightarrow m\angle BAC = 90^\circ - \theta$$

$$\Rightarrow m\angle ATO = \theta$$

• En  $\triangle OBT$ :

$$R^2 = 8(18)$$

$$\therefore R = 12$$

**Clave C**





**RESOLUCIÓN N° 281**

Piden x.

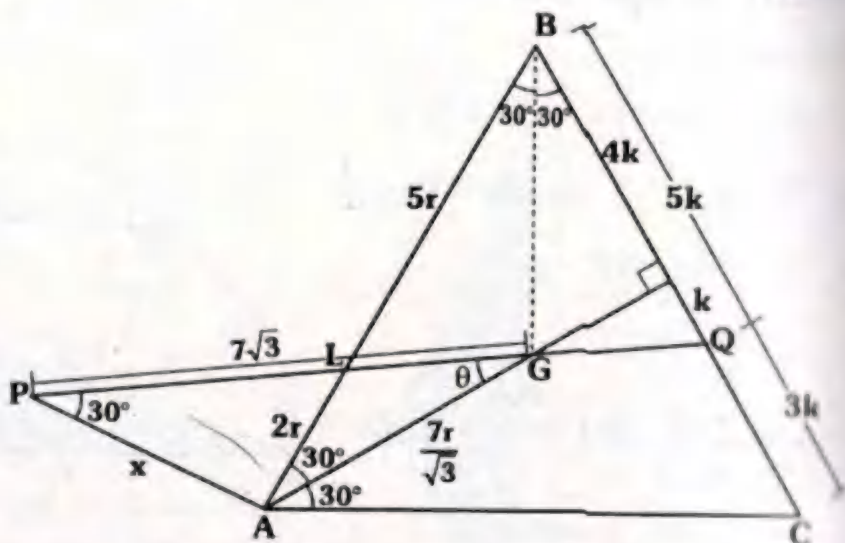
- Por teorema (pág. 37)

$$\frac{AL}{LB} + \frac{3x}{5x} = 1 \Rightarrow \frac{AL}{LB} = \frac{2}{5}$$

- $\triangle AGB$ :  $AG = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{7r}{\sqrt{3}}$

- $\triangle ALG \sim \triangle PGA$

$$\Rightarrow \frac{x}{2r} = \frac{7\sqrt{3}}{\left(\frac{7r}{\sqrt{3}}\right)}$$



$$\therefore x = 6$$

Clave **A**

**RESOLUCIÓN N° 282**

Nos piden:  $\frac{AE}{ED} - \frac{MF}{FD}$

- Sea  $AM = MC = 3a$

- $\triangle MBC \sim \triangle GBL$

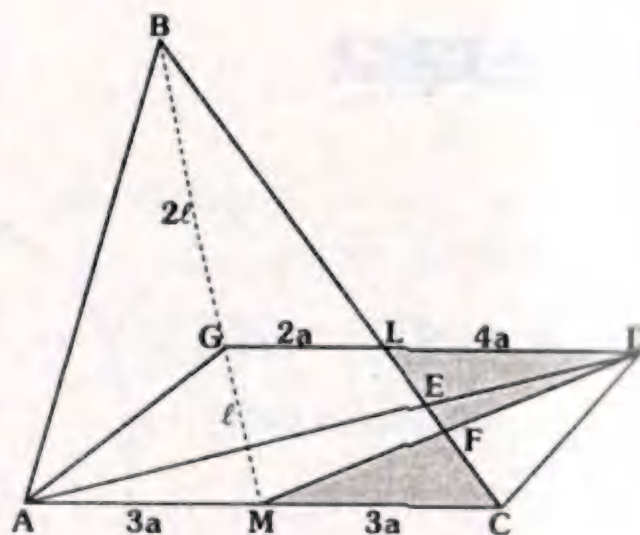
$$\Rightarrow \frac{GC}{MC} = \frac{2}{3} \Rightarrow GC = 2a \text{ y } MC = 3a$$

$$\Rightarrow LD = 4a$$

- $\triangle MFC \sim \triangle DFL \Rightarrow \frac{MF}{FD} = \frac{3}{4}$

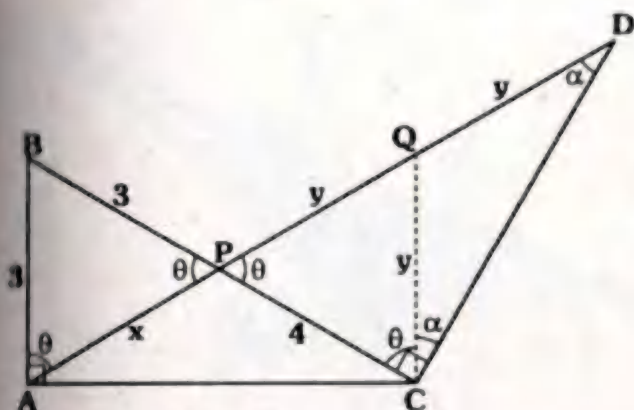
- $\triangle AEC \sim \triangle DEL \Rightarrow \frac{AE}{ED} = \frac{6a}{4a} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{AE}{ED} - \frac{MF}{FD} = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}$

$$\therefore \frac{AE}{ED} - \frac{MF}{FD} = \frac{3}{4}$$



Clave **A**

**RESOLUCIÓN N° 283**



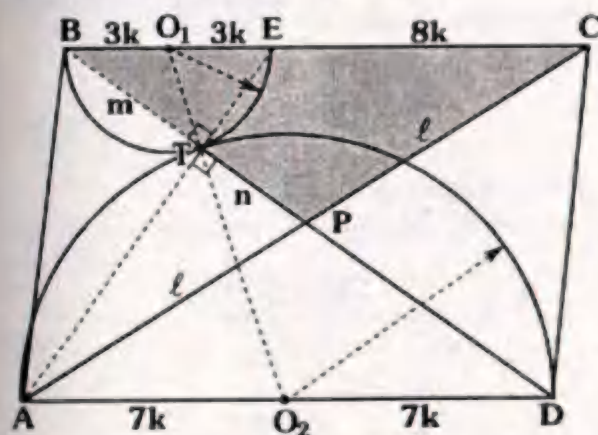
Piden (AP)(PD)

- Como  $\triangle ABP$  es isósceles  
 $\Rightarrow m\angle BAP = m\angle APB = \theta$
- En  $\triangle PCD$ , se traza la mediana CQ  
 $\Rightarrow PQ = QD = QC = y$
- $\triangle ABP \sim \triangle PQC \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{3}{y}$   
 $\Rightarrow xy = 12$

$$\therefore (AP)(PD) = 24$$

**Clave C**

**RESOLUCIÓN N° 284**



Piden  $\frac{TP}{PD}$

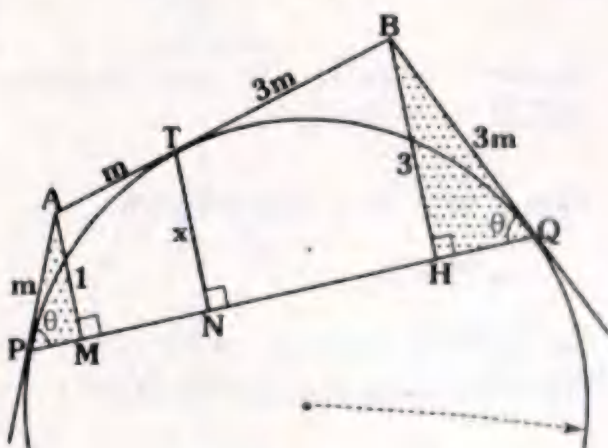
- Notemos que  $O_1, T$  y  $O_2$  son colineales  
 $\Rightarrow m\angle TO_2D = m\angle TO_1B$   
 $\Rightarrow m\widehat{BT} = m\widehat{TD}$
- También: E, T y A : colineales
- En  $\triangle DBC$ , teorema de Menelao:  
 $m8k\ell = n6k2\ell \Rightarrow 2m = 3n$   
 $\Rightarrow m = 3k$  y  $n = 2k$
- Como  $BP = PD \Rightarrow PD = 5k$

$$\Rightarrow \frac{TP}{PD} = \frac{2k}{5k}$$

$$\therefore \frac{TP}{PD} = \frac{2}{5}$$

**Clave B**

**RESOLUCIÓN N° 285**



Piden x.

- $\triangle PMA \sim \triangle QHB$   
 $\Rightarrow AP = m$  y  $BQ = 3m$



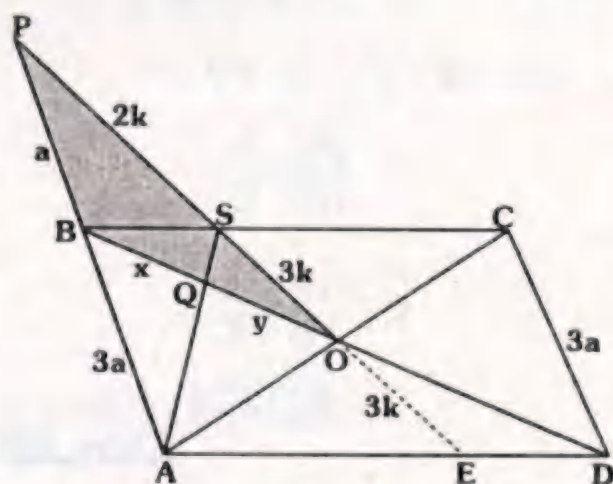
- En el trapecio MABH:

$$x = \frac{(1)(3m) + (3)(m)}{m + 3m}$$

$$\therefore x = 1,5$$

Clave A

### RESOLUCIÓN N° 286



Piden  $\frac{x}{y}$ .

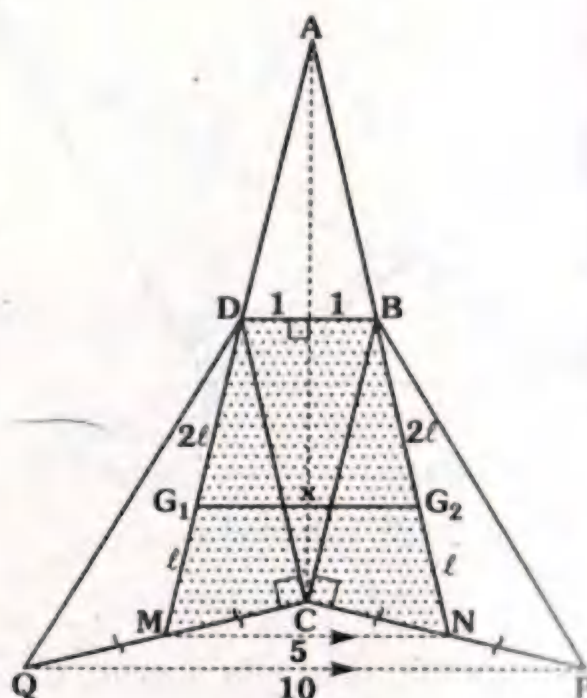
- Como O es centro del paralelogramo ABCD  $\Rightarrow SO = OE = 3k$
- Como  $\overline{BS} \parallel \overline{AE}$  y  $AB = 3(BP)$   
 $\Rightarrow PS = 2k$
- En  $\triangle BPO$ , usemos el teorema de Menelao, la recta secante es SQA

$$\Rightarrow x(3k)(4a) = y(2k)(3a)$$

$$\therefore \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$$

Clave A

### RESOLUCIÓN N° 287



Piden x.

- Sean  $G_1$  y  $G_2$  baricentros de los triángulos BCP y DCQ respectivamente.

$\Rightarrow \overline{DM}$  y  $\overline{BN}$  son medianas y

$$DG_1 = 2(G_1M) \text{ y } BG_2 = 2(G_2N)$$

- Por base media en el  $\triangle QCP$ :

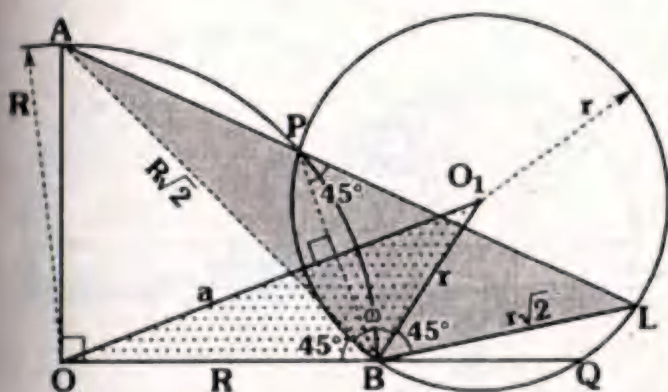
$$MN = 5$$

- En el trapecio MDEN:

$$x = \frac{2(l) + 5(2l)}{l + 2l}$$

$$\therefore x = 4$$

Clave B

**RESOLUCIÓN N° 288**

- Por propiedad de circunferencia:

$$m\angle BPL = 45^\circ \Rightarrow m\widehat{BL} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow BL = r\sqrt{2}$$

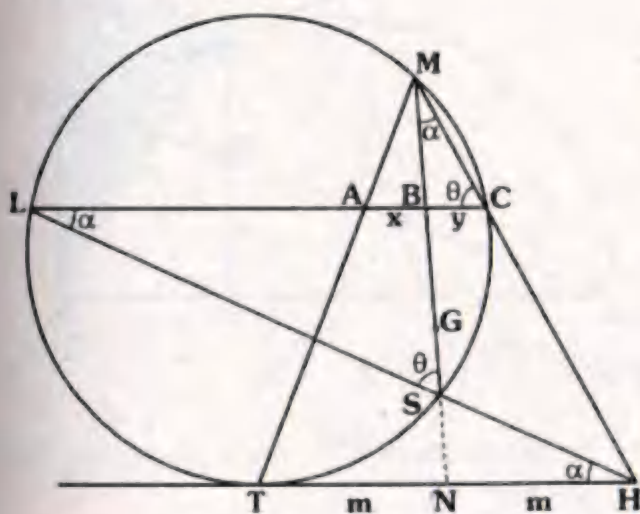
- Como  $AB = R\sqrt{2}$ ,  $BL = \sqrt{2}$  y

$$m\angle ABL = m\angle OBO_1$$

$$\Rightarrow \triangle OBO_1 \sim \triangle ABL$$

$$\Rightarrow \frac{AL}{a} = \frac{r\sqrt{2}}{r}$$

$$\therefore AL = a\sqrt{2}$$

Clave **C****RESOLUCIÓN N° 289**

- ❖ Piden  $x/y$ .

- Como G es baricentro del  $\Delta TMH$

$$\Rightarrow \text{TN} = \text{NH}$$

- Por teorema de la tangente:

$$m^2 = (NS)(NM)$$

- En  $\triangle MHN$ : por el propiedad (pág. 25)

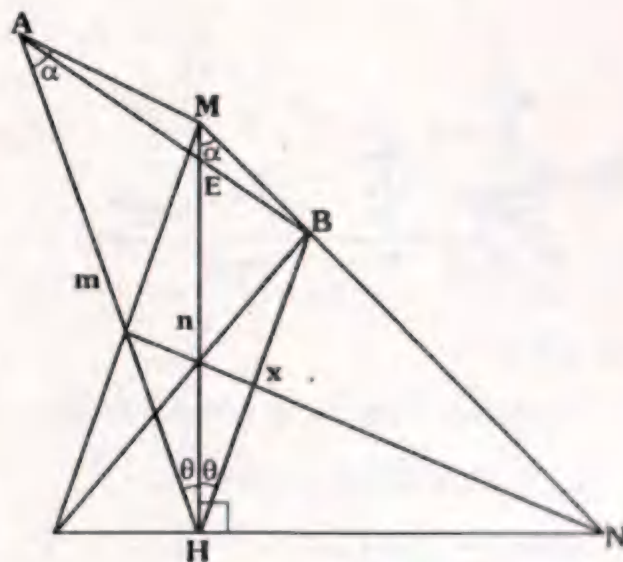
$$m \angle NHS = m \angle SMC = \alpha$$

$$\Rightarrow \overline{\text{LC}} // \overline{\text{TH}}$$

- En  $\Delta TMH$ :  $\frac{x}{y} = \frac{m}{m}$

$$\therefore \frac{x}{v} = 1$$

**Clave A**

**RESOLUCIÓN N° 290**

- ❖ Piden AE/EB.

- Por teorema de Blanchet

$$m \triangleleft_{AHM} = m \triangleleft_{MHB}$$

- $\triangle AHM \sim \triangle BHM$



$$\Rightarrow \frac{x}{n} = \frac{n}{m} \Rightarrow x = \frac{n^2}{m}$$

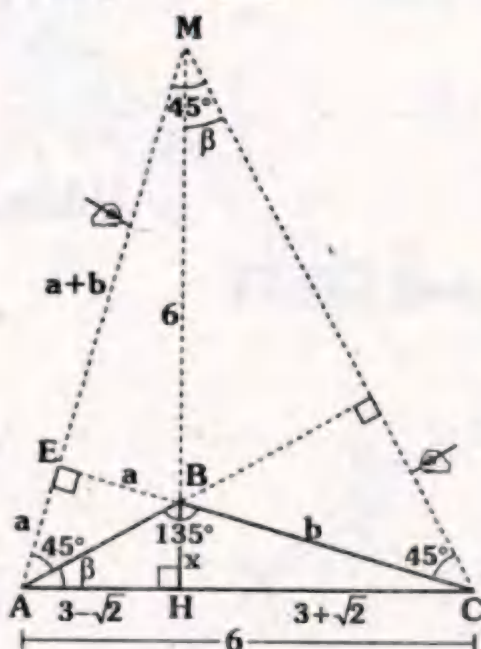
- En  $\triangle AHB$ , por teorema de la bisectriz:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{m}{x}$$

$$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{m^2}{n^2}$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 291**



Nos piden  $x$ .

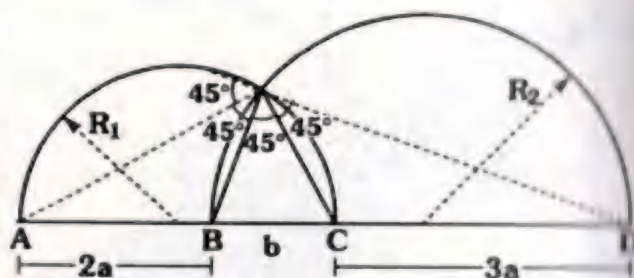
- Ubicamos el ortocentro  $M$  del  $\triangle ABC$
- $\triangle AEC \cong \triangle BEM \Rightarrow MB = AC = 6$
- $\triangle AHB \sim \triangle MHC$ :

$$\frac{x}{3-\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{2}}{x+6} \Rightarrow x(x+6) = 7$$

$$\therefore x = 1$$

**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 292**



Nos piden  $\frac{R_1}{R_2}$ .

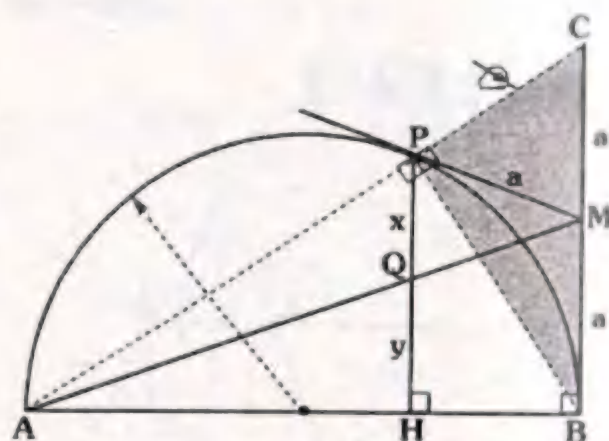
- Se observa  $\frac{R_1}{R_2} = \frac{AC}{BD}$

- Notamos también que: A, B, C y D forman una cuaterna armónica

$$\Rightarrow \frac{2a}{b} = \frac{5a+b}{3a} \Rightarrow a = b$$

$$\therefore \frac{R_1}{R_2} = \frac{AC}{BD} = \frac{3a}{4a} = \frac{3}{4}$$

**RESOLUCIÓN N° 293**



Piden  $x/y$ .

- Notemos que  $\overline{PM}$  es la mediana del  $\triangle BPC$ .

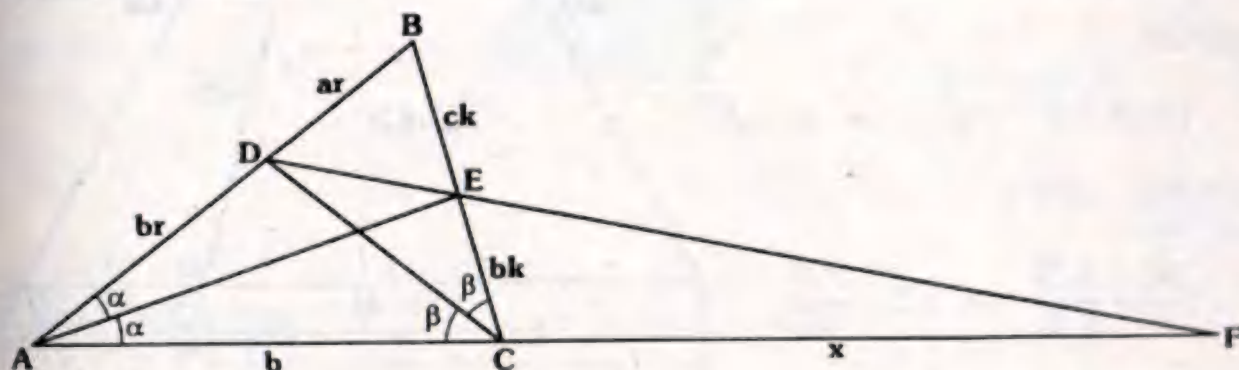
•  $\triangle AHP \sim \triangle ABC$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a}{a}$$

$$\therefore \frac{x}{y} = 1$$

Clave **A**

**RESOLUCIÓN N° 294**



Nos piden  $x$ .

• Por teorema de la bisectriz:  $AD=br$ ;  $DB=ar$ ;  $BE=ck$  y  $EC=bk$

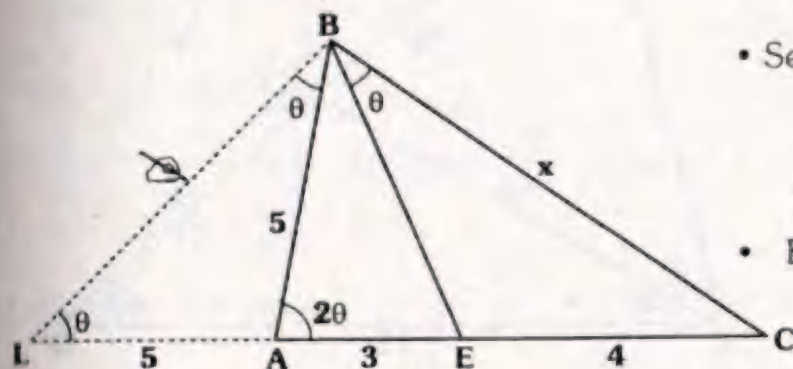
•  $\triangle ABC$ , por teorema de Menelao (recta secante:  $\overleftrightarrow{DEF}$ )

$$x(ck)(br) = (ar)(bk)(x + b)$$

$$\therefore x = \frac{ab}{c - a}$$

Clave **B**

**RESOLUCIÓN N° 295**



Nos piden  $x$ .

• Se prolonga  $\overline{CA}$  tal que:

$$m\angle ALB = \theta$$

$$\Rightarrow \triangle LAB: \text{isósceles} \Rightarrow AL=5$$

• En  $\triangle LBC$ , por propiedad:

$$x^2 = (4)(12)$$

$$\therefore x = 4\sqrt{3}$$

Clave **B**



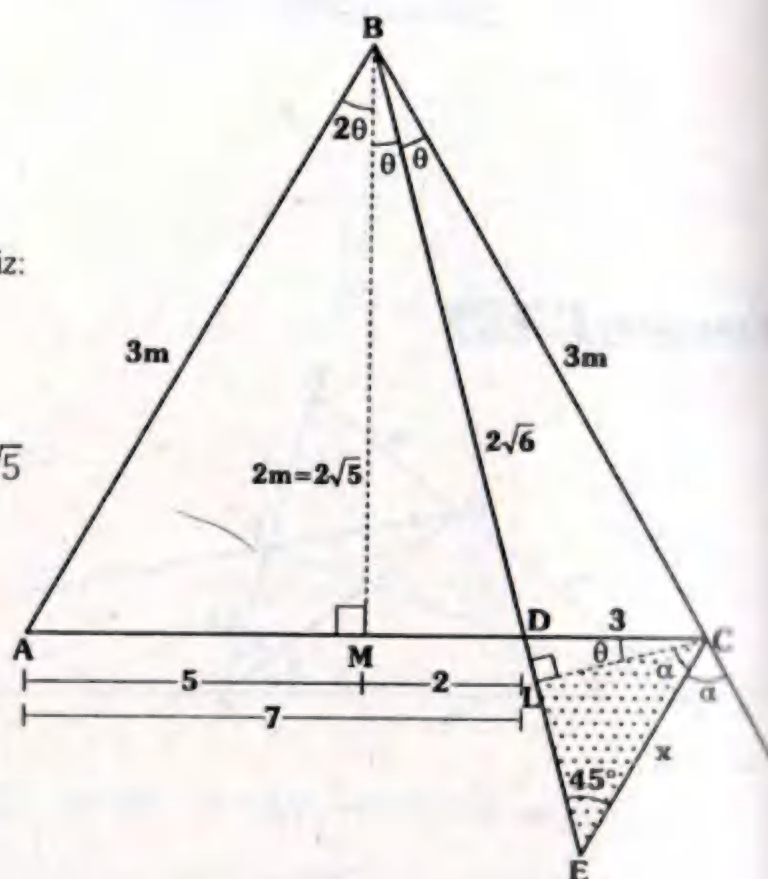
**RESOLUCIÓN N° 296**

Piden x.

- $\triangle ABC$ , se traza la altura  $\overline{BM}$   
 $\Rightarrow AM=MC=5 \Rightarrow MD=3$
- $\triangle BMC$ , por teorema de la bisectriz:  
 $BM=2m$  y  $BC=3m$
- $\triangle BMC$ :  
 $(2m)^2 + 5^2 = (3m)^2 \Rightarrow m = \sqrt{5}$
- $\triangle DMB \sim \triangle DLC$   
 $\frac{LC}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} \Rightarrow LC = \frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$
- $\triangle BLC$ :

$$x = (LC)\sqrt{2}$$

$$\therefore x = \sqrt{15}$$

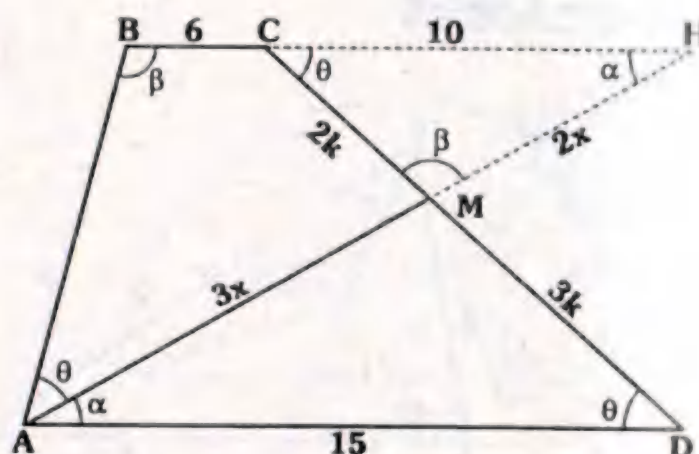


**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 297**

Nos piden AM.

- $\triangle AMD \sim \triangle HMC$   
 $\Rightarrow AM=3x$ ,  $MH=2x$  y  $HC=10$
- $\triangle MCH \sim \triangle BAH$   
 $\Rightarrow \frac{(2x)}{10} = \frac{16}{(5x)} \Rightarrow x = 4$
- Como  $AM=3x$   
 $\therefore AM = 12$



**Clave D**

**RESOLUCIÓN N° 298**

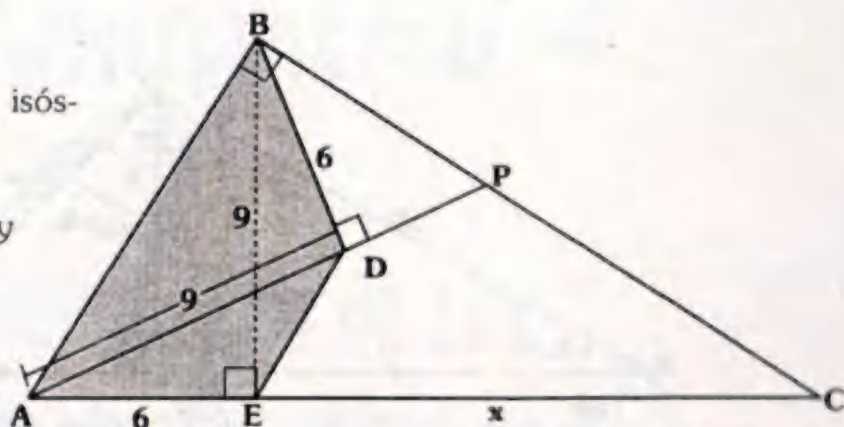
Piden  $x$ .

- Como ABDE es un trapecio isósceles:

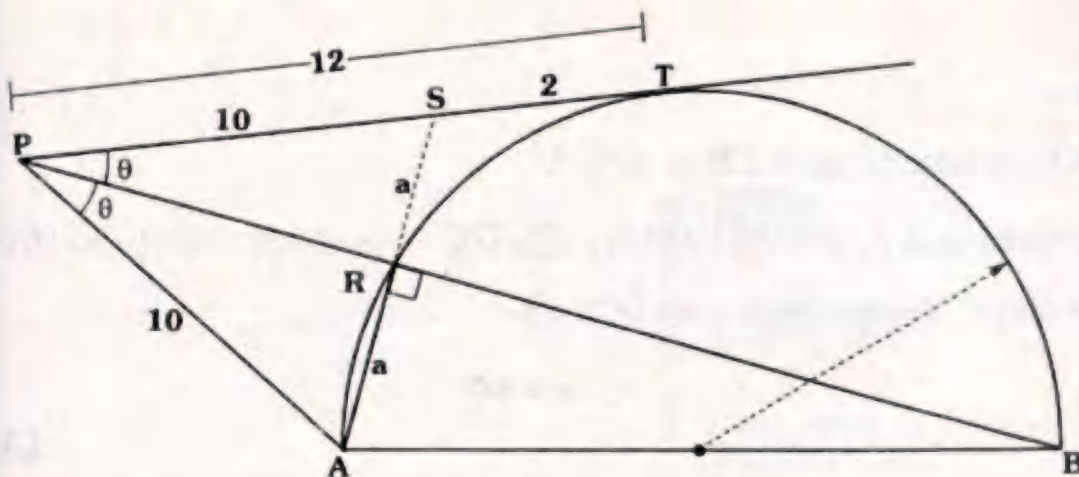
$$\Rightarrow AE = BD = 6, AD = BE = 9 \text{ y} \\ m\angle AEB = 90^\circ$$

- $\triangle ABC$ :  $9^2 = (6)(x)$

$$\therefore x = 13,5$$



**Clave** C

**RESOLUCIÓN N° 299**

Nos piden PB.

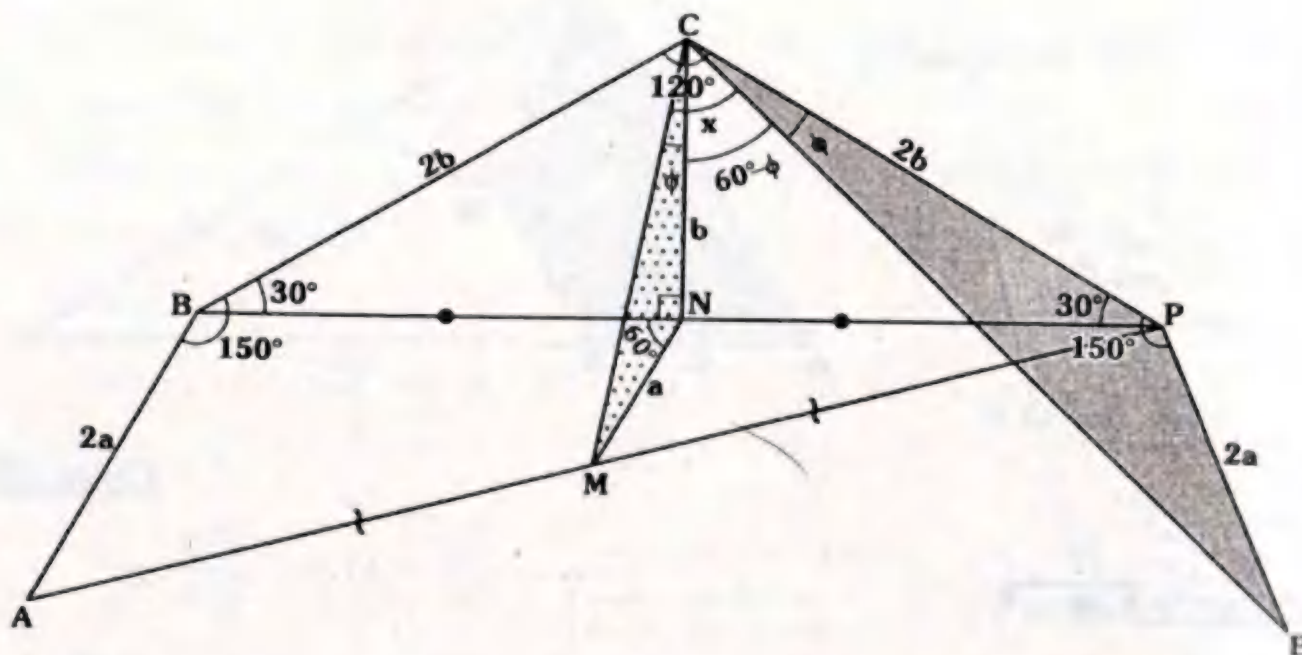
- $\triangle APS$ : isósceles
- Por teorema de la tangente:  $2^2 = a(2a) \Rightarrow a = \sqrt{2}$
- En  $\triangle PRS$ :  $PR = 7\sqrt{2}$
- Por teorema de la tangente:  $12^2 = (7\sqrt{2})(PB)$

$$\therefore PB = \frac{72}{7}\sqrt{2}$$

**Clave** B



## 254



◆◆◆◆◆

- En  $\triangle BCD$ , se traza la altura  $CN \Rightarrow CN = b$
- Por base media en el  $\triangle ABD$ :  $AB = 2(MN)$  y  $\overline{AB} \parallel \overline{MN} \Rightarrow m\angle MNB = 60^\circ$  y  $m\angle MNC = 150^\circ$
- $\triangle MNC \sim \triangle EDC \Rightarrow m\angle MNC = m\angle DCE = \phi$

$$\therefore x = 60^\circ$$

**Clave B**

# **Geometría**

## **ENUNCIADO DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS**

- ANUAL
- CEPRE UNI
- SEMESTRAL
- SEMESTRAL INTENSIVO
- REPASO

**PROPORCIONALIDAD  
Y SEMEJANZA**



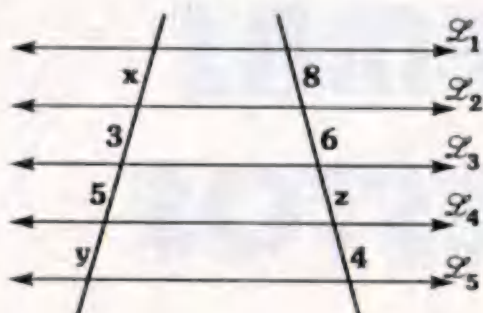


# Problemas Propuestos

## Ciclo Anual

### PROBLEMA N° 1

Del gráfico,  $\vec{\ell}_1 \parallel \vec{\ell}_2 \parallel \vec{\ell}_3 \parallel \vec{\ell}_4 \parallel \vec{\ell}_5$ , calcule  $x+y+z$ .



- A) 10                      B) 12                      C) 18  
D) 16                      E) 20

### PROBLEMA N° 2

Se tiene el trapecio ABCD, se ubica P en  $\overline{AB}$  y Q en  $\overline{CD}$  tal que  $\overline{AD} \parallel \overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ . Si  $AP=x+3$ ;  $PB=x+1$ ;  $CQ=x+2$  y  $QD=x+5$ . Calcule x.

- A) 1                      B) 2                      C) 3  
D) 4                      E) 5

### PROBLEMA N° 3

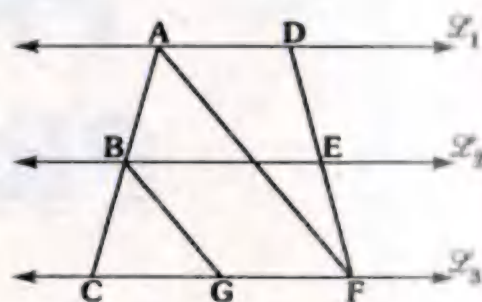
En un triángulo ABC, se ubica E en  $\overline{AB}$  y F en  $\overline{BC}$  tal que  $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$ . Si  $AE=7$ ,  $FC=10$  y  $EB=14$ . Calcule BF.

- A) 10                      B) 20                      C) 25  
D) 30                      E) 35

### PROBLEMA N° 4

En el gráfico,  $\vec{\ell}_1 \parallel \vec{\ell}_2 \parallel \vec{\ell}_3$ ,  $\overline{BG} \parallel \overline{AF}$ ,  $CG=3$ ,  $GF=EF=2$  y  $ED=x+1$ . Calcule x.

- A) 1/2  
B) 1/3  
C) 1/4  
D) 1/5  
E) 1/6



### PROBLEMA N° 5

En el triángulo ABC, se ubican los puntos P, Q y F en  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{BQ}$  respectivamente. Si  $\overline{PF} \parallel \overline{AQ}$ ,  $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$ ,  $BF=3$ ,  $FQ=4$ . Calcule QC.

- A) 5                      B) 7                      C)  $\frac{21}{4}$   
D)  $\frac{28}{3}$                       E)  $\frac{30}{7}$

### PROBLEMA N° 6

En el triángulo ABC, se traza la bisectriz interior  $\overline{BD}$  y la ceviana interior  $\overline{AM}$  secantes en E. Si  $BE=ED$ ,  $BM=3$  y  $MC=5$ . Halle AB.

- A) 10                      B) 11                      C) 12  
D) 13                      E) 14

**PROBLEMA N° 7**

En el triángulo ABC, se traza la bisectriz interior BP tal que  $m\angle PBC = m\angle BCA$ ,  $AB=1$  y  $BC=2$ . Calcule BP.

- A)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       B)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$       C)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
D)  $\sqrt{2}$       E)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**PROBLEMA N° 8**

En el triángulo ABC, se ubica P en  $\overline{BC}$  y Q en  $\overline{AC}$ . Si  $m\angle BAC = 80^\circ$ ,  $AQ=5$ ,  $AB=4$ ,  $QC=3$  y  $PC=3(BP)$ .

Calcule  $m\angle PQC$ .

- A)  $80^\circ$       B)  $90^\circ$       C)  $100^\circ$   
D)  $120^\circ$       E)  $130^\circ$

**PROBLEMA N° 9**

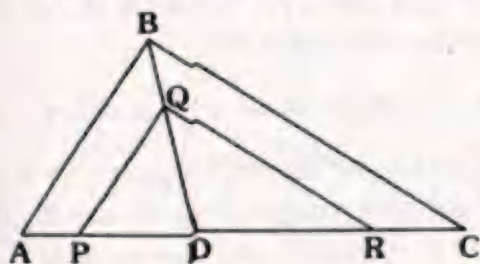
En el gráfico,  $\vec{\mathcal{L}}_1 \parallel \vec{\mathcal{L}}_2 \parallel \vec{\mathcal{L}}_3$ .

Calcule DF.

- A) 10  
B) 5  
C) 11  
D) 12  
E) 13
- 

**PROBLEMA N° 10**

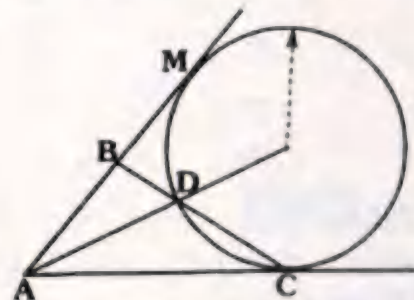
En el gráfico,  $\overline{AB} \parallel \overline{PQ}$ ,  $\overline{BC} \parallel \overline{QR}$ ,  $AP=3$ ,  $PD=4$  y  $DR=5$ . Calcule RC.



- A)  $\frac{11}{4}$       B)  $\frac{13}{4}$       C)  $\frac{15}{4}$   
D)  $\frac{17}{4}$       E)  $\frac{19}{4}$

**PROBLEMA N° 11**

En el gráfico, M y C son puntos de tangencia. Si  $AB=6$  y  $BM=4$ . Calcule  $BD/DC$ .



- A)  $3/2$       B)  $3/4$       C)  $3/5$   
D)  $2/3$       E)  $4/5$

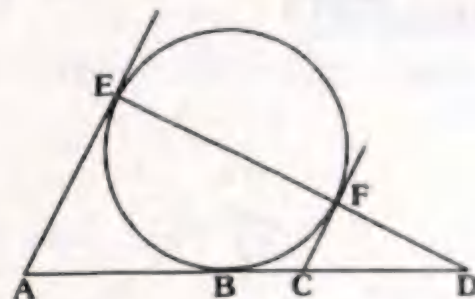
**PROBLEMA N° 12**

En el triángulo ABC, I es incentro y E es excentro relativo a  $\overline{BC}$ . Si  $\overline{IE} \cap \overline{BC} = \{M\}$ ,  $IM=4$  y  $ME=12$ . Calcule AI.

- A) 6      B) 7      C) 8  
D) 9      E) 10

**PROBLEMA N° 13**

En el gráfico, E y F son puntos de tangencia. Si  $AB=6$  y  $CD=4$ . Calcule BC.

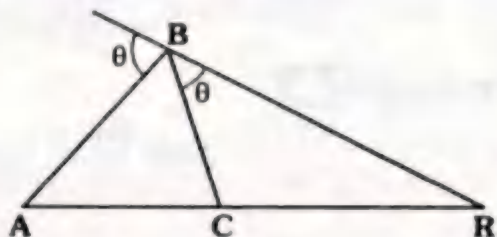


- A) 2      B) 1,8      C) 2,5  
D) 3,5      E) 3



**PROBLEMA N° 14**

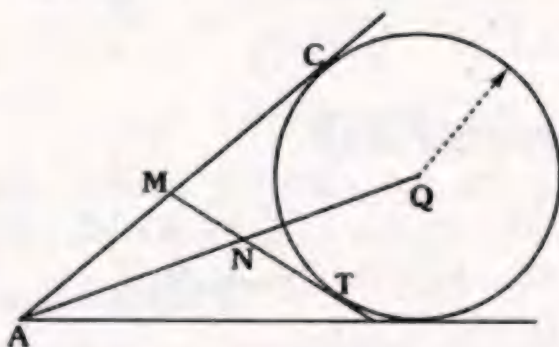
En el gráfico,  $AB=14$ ,  $BC=10$  y  $AC=6$ . Calcule  $RC$ .



- A) 10                      B) 15                      C) 7,5  
D) 12,5                    E) 5

**PROBLEMA N° 15**

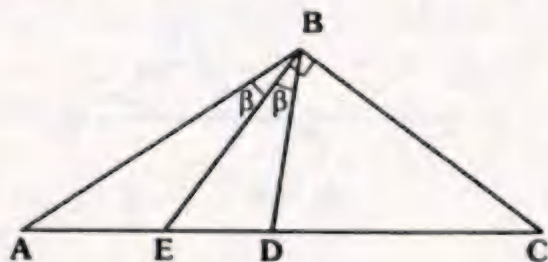
En el gráfico,  $AM=MC$ ,  $MN=a$  y  $NT=b$ . Calcule  $NQ/AN$ .



- A)  $\frac{a}{b}$                       B)  $\frac{b}{a}$                       C)  $\frac{a+b}{a}$   
D)  $\frac{a+b}{b}$                     E)  $\frac{a^2}{b^2}$

**PROBLEMA N° 16**

En el gráfico,  $2(AB)=3(BD)$  y  $ED=6$ . Calcule  $AC$ .

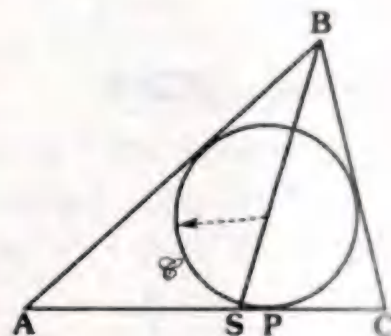


- ❖ A) 45                      B) 42                      C) 39  
❖ D) 36                      E) 30

**PROBLEMA N° 17**

En el gráfico,  $\mathcal{C}$  es la circunferencia inscrita en el triángulo ABC, si  $AB=30$ ,  $BC=26$  y  $AC=28$ . Calcule  $SP$ .

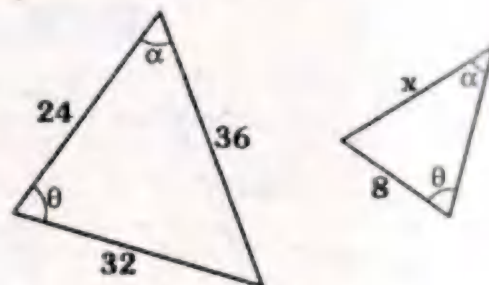
- ❖ A) 0,8  
❖ B) 0,5  
❖ C) 1  
❖ D) 1,5  
❖ E) 2



**PROBLEMA N° 18**

En el gráfico, calcule  $x$ .

- ❖ A) 9  
❖ B) 4  
❖ C) 3  
❖ D) 3,5  
❖ E) 5



**PROBLEMA N° 19**

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

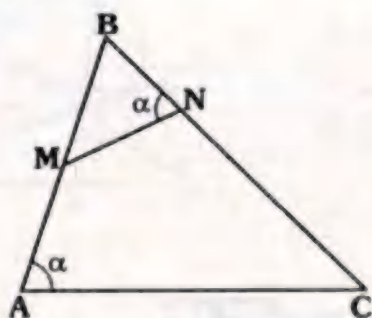
- ❖ I. Dos polígonos de igual cantidad de lados son semejantes.  
❖ II. Dos cuadrados son semejantes.  
❖ III. Los lados de un rectángulo son 1 y 3 y los de otro miden 3 y 6, entonces dichos rectángulos son semejantes.

- A) VVV      B) FFF      C) VFV  
D) FVF      E) VVF

**PROBLEMA N° 20**

En el gráfico,  $BC=20$  y  $(AB)(MB)=120$ .  
Calcule  $BN$ .

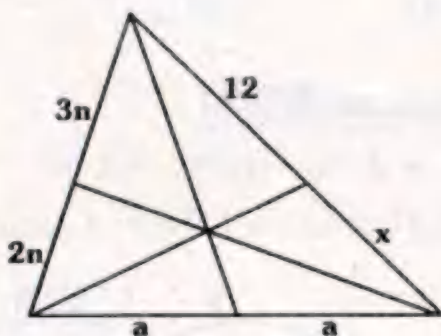
- A) 2,5  
B) 4  
C) 6  
D) 3  
E) 5



**PROBLEMA N° 21**

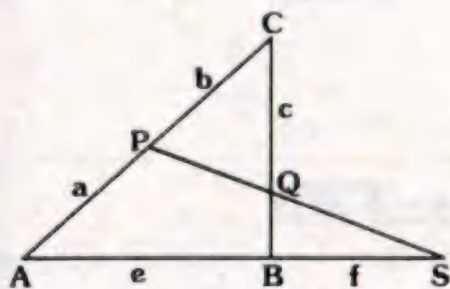
Del gráfico, calcule  $x$ .

- A) 10  
B) 6  
C) 8  
D) 12  
E) 9



**PROBLEMA N° 22**

Indique la expresión correcta en:

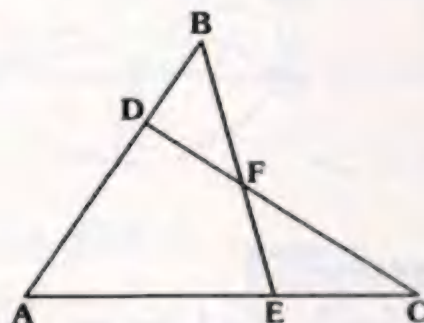


- ❖ A)  $abc=edf$       B)  $acf=bde$   
❖ C)  $acf=bde$       D)  $acf=bd(e+f)$   
❖ E)  $acf=ed(f+d)$

**PROBLEMA N° 23**

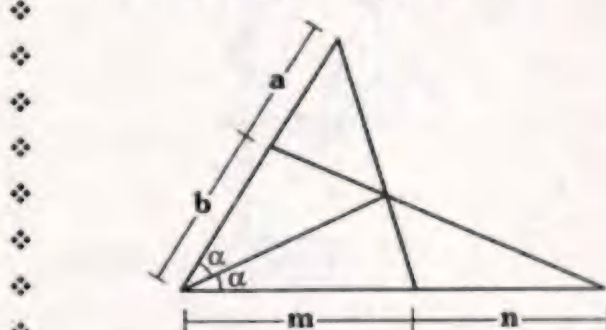
En el gráfico  $AD=6(DB)$  y  $AE=EC$ .  
Calcule  $BF/FE$ .

- ❖ A)  $1/6$       B)  $1/3$       C)  $1/2$   
❖ D)  $2/5$       E)  $2/3$



**PROBLEMA N° 24**

Indique la expresión correcta:



- ❖ A)  $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{a+b}{m+n}$   
❖ B)  $\left(\frac{a}{a+b}\right)\left(\frac{m+n}{n}\right)=\frac{a+b}{m+n}$   
❖ C)  $ab=mn$   
❖ D)  $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{m+n}{m-n}\right)=\frac{a+b}{m+n}$   
❖ E)  $am=bn$



**PROBLEMA N° 25**

En un gráfico  $BN=3$  y  $BP=4$ . Calcule la medida del arco  $AB$ .

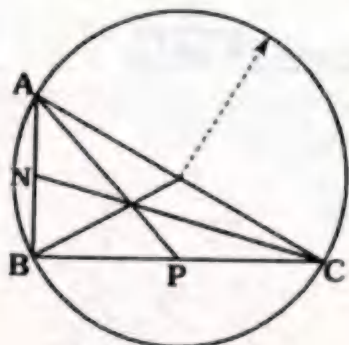
A)  $37^\circ$

B)  $74^\circ$

C)  $106^\circ$

D)  $74^\circ$

E)  $90^\circ$



**PROBLEMA N° 26**

En el gráfico, M, N y L son puntos de tangencia. Si  $BC=10$  y  $LB=5$ . Calcule  $AL$ .

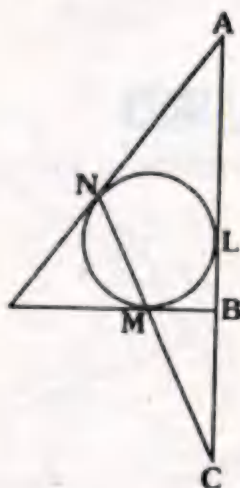
A) 3

B) 14

C) 7,5

D) 5

E) 1



**PROBLEMA N° 27**

Se tiene el triángulo  $ABC$ , se traza la bisectriz interior  $BE$ . D y F son puntos de la región exterior tal que  $\overline{DA} \parallel \overline{FE}$  y D, F y C son colineales. Si  $AB=10$ ,  $BC=14$  y  $AD=6$ . Calcule  $EF$ .

A) 2,5

B) 3

C) 7

D) 4,5

E) 3,5

**PROBLEMA N° 28**

En el gráfico,  $AR=2$ ,  $RC=5$  y  $CQ=6$ .

Calcule  $AP$ .

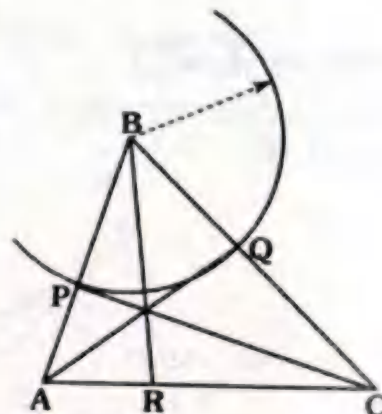
A)  $1/6$

B)  $1/3$

C)  $12/5$

D)  $24/5$

E)  $10/3$



**PROBLEMA N° 29**

En el triángulo  $ABC$ , se traza la bisectriz interior  $BD$  y la mediana  $BM$ . Si  $AB=8$ ,  $BC=12$  y  $DM=1,5$ . Calcule  $AC$ .

A) 12

B) 14

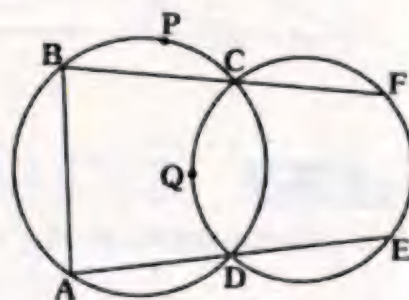
C) 15

D) 16

E) 18

**PROBLEMA N° 30**

En el gráfico,  $m\widehat{BPC} = m\widehat{CQD}$ ,  $(BC)(CE)=18$  y  $CD=6$ . Calcule  $AC$ .



A) 3

B) 9

C) 4

D) 6

E) 2

**PROBLEMA N° 31**

Por el incentro  $I$  del triángulo  $ABC$  se traza una recta paralela a  $\overline{AC}$ , que interseca a

$\overline{BC}$  en P. Si  $AB=10$ ,  $BC=12$  y  $AC=11$ , calcule PC.

- A) 2                      B) 3                      C) 3  
D)  $\frac{11}{3}$                       E) 4

**PROBLEMA N° 32**

En un triángulo isósceles ABC de base AC, se traza la altura BH y la mediana AM, las cuales se cortan en N. Calcule AN/NM.

- A)  $\frac{3}{2}$                       B) 2                      C)  $\frac{4}{3}$   
D)  $\frac{4}{5}$                       E) 1

**PROBLEMA N° 33**

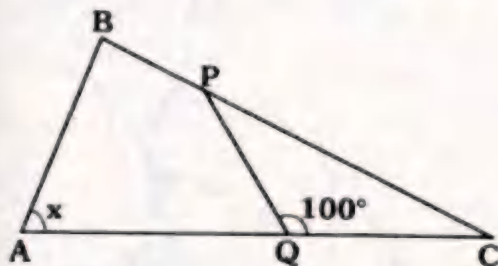
En un cuadrado se ubica H en la prolongación de  $\overline{BA}$ , tal que  $\overline{CH}$  corta a  $\overline{AD}$  en M.  $AH=3$  y  $AM=2$ . Calcule el perímetro de la región cuadrada.

- A) 26                      B) 16                      C) 12  
D) 24                      E) 28

**PROBLEMA N° 34**

En el gráfico mostrado,  $PC=3(BP)$ , si

$$\frac{AB}{4} = \frac{AQ}{5} = \frac{QC}{3} \text{ . Calcule } x.$$



- A)  $20^\circ$                       B)  $30^\circ$                       C)  $40^\circ$   
D)  $80^\circ$                       E)  $50^\circ$

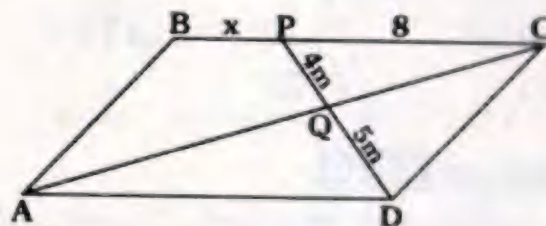
**PROBLEMA N° 35**

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Dos triángulos isósceles son semejantes.  
II. Dos triángulos equiláteros son semejantes.  
III. Dos rectángulos son siempre semejantes.  
A) VVV                      B) FFF                      C) FVV  
D) FVF                      E) VVF

**PROBLEMA N° 36**

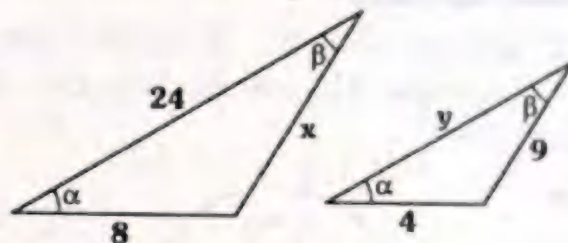
En el gráfico, ABCD es un paralelogramo, calcule x.



- A) 2,5                      B) 4                      C) 3  
D) 3,5                      E) 2

**PROBLEMA N° 37**

En el gráfico, calcule x e y.



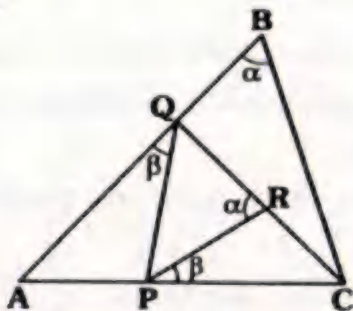
- A) 18 y 12                      B) 18 y 10  
C) 16 y 10                      D) 16 y 14  
E) 10 y 6



**PROBLEMA N° 38**

En el gráfico,  $BC=3(QR)$  y  $PR=3$ .  
Calcule AB.

- A) 6
- B) 8
- C) 7
- D) 9
- E) 10



**PROBLEMA N° 39**

En un paralelogramo ABCD, se traza una recta que pasa por A y corta a CD en E y a la diagonal BD en F, si  $CD=30$  y  $BF=3(FD)$ . Calcule EC.

- A) 20
- B) 25
- C) 15
- D) 10
- E) 30

**PROBLEMA N° 40**

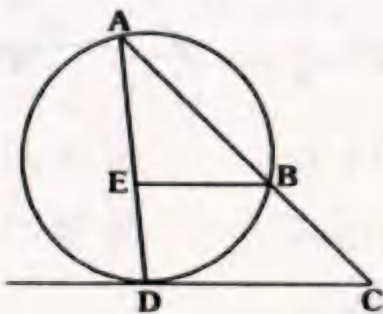
Un edificio mide 45 metros, proyecta una sombra de 60 metros. ¿Cuál será la sombra proyectada por un árbol de 6 metros a la misma hora?

- A) 6m
- B) 8m
- C) 7m
- D) 9m
- E) 10m

**PROBLEMA N° 41**

En el gráfico,  $EB \parallel DC$ ,  $(EB)(DB)=20$  y  $BC=5$ , calcule AE, siendo D punto de tangencia.

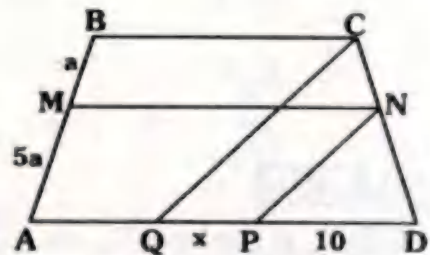
- A) 4
- B) 5
- C) 7
- D) 3
- E) 6



**PROBLEMA N° 42**

Si  $BC \parallel MN \parallel AD$  y  $CQ \parallel NP$ , halle x.

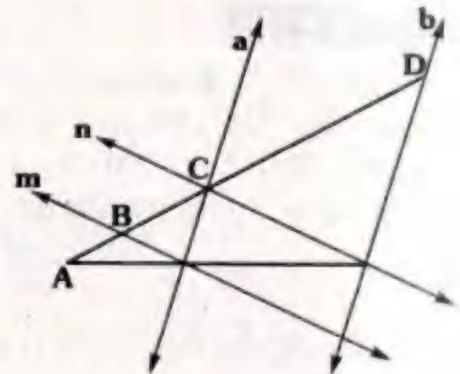
- A) 1
- B) 2
- C) 3
- D) 4
- E) 5



**PROBLEMA N° 43**

Si:  $\vec{m} \parallel \vec{n}$  y  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , calcule CD, si  $AB=5$  y  $BC=3$ .

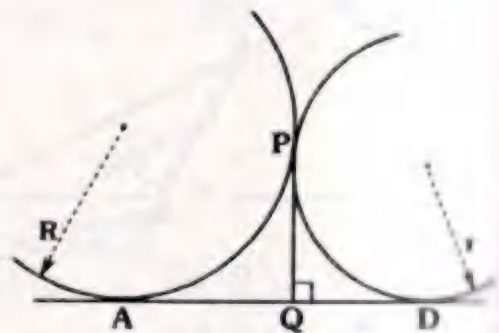
- A) 2,4
- B) 2
- C) 3,4
- D) 4,8
- E) 3,2



**PROBLEMA N° 44**

En el gráfico, A, P y D son puntos de tangencia. Si  $R=6$  y  $r=3$ , calcule PQ.

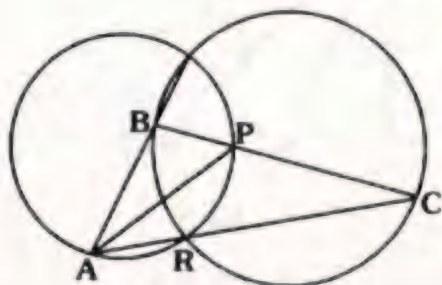
- A) 4
- B) 2
- C) 3
- D) 4,5
- E) 3,5



**PROBLEMA N° 45**

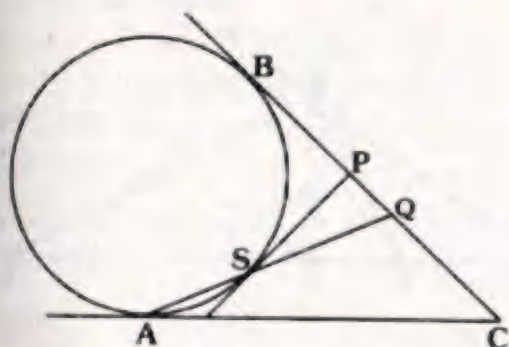
En el gráfico,  $AP=6$  y  $AR=3$ . Calcule  $RC$

- A) 9
- B) 18
- C) 12
- D) 15
- E) 10



**PROBLEMA N° 46**

En el gráfico A, S y Q son puntos de tangencia. Si  $BP=3$  y  $PQ=2$ , calcule  $QC$ .



- A) 10
- B) 6
- C) 8
- D) 12
- E) 9

**PROBLEMA N° 47**

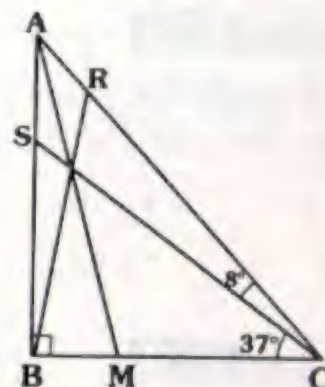
En el triángulo  $ABD$ , se ubica  $C$  en  $AD$ , si  $3(AC)=2(CD)$ ,  $BC=6$  y  $m\angle CBD = m\angle DAB + m\angle ADB$ . Calcule  $AB$ .

- A) 8
- B) 9
- C) 10
- D) 12
- E) 14

**PROBLEMA N° 48**

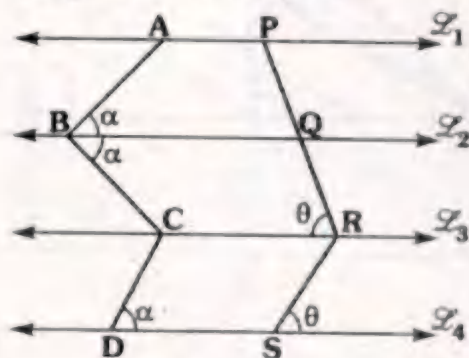
En el gráfico,  $BM=2$  y  $MC=6$ . Calcule  $RC/AR$ .

- A)  $1/3$
- B)  $10/3$
- C) 9
- D)  $9/2$
- E) 6



**PROBLEMA N° 49**

En el gráfico,  $\vec{\mathcal{L}}_1 // \vec{\mathcal{L}}_2 // \vec{\mathcal{L}}_3 // \vec{\mathcal{L}}_4$ . Si  $BC=3(AB)+2$ ;  $QR=2(RS)+1$  y  $CD=3(PQ)=6$ . Calcule  $AB$ .

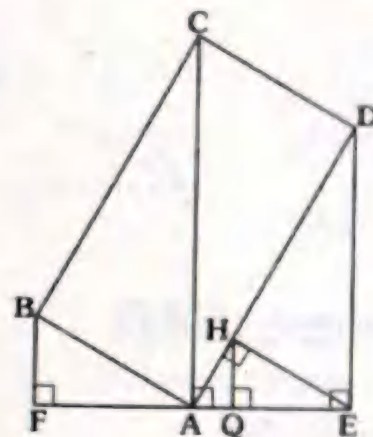


- A) 3
- B) 4
- C) 3,5
- D) 4,5
- E) 5

**PROBLEMA N° 50**

En el gráfico,  $ABCD$  es un rectángulo,  $DE=a$  y  $BF=b$ . Calcule  $HQ$ .

- A)  $\sqrt{ab}$
- B)  $2\sqrt{ab}$
- C)  $\frac{ab}{a+b}$
- D)  $\frac{2ab}{a+b}$
- E)  $\frac{a^2+b^2}{a+b}$





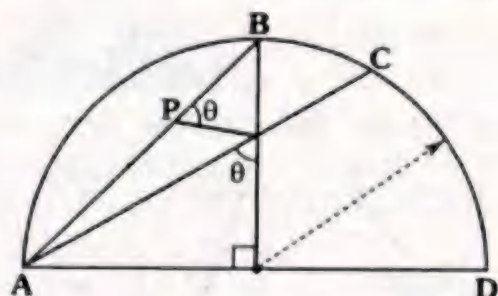
**PROBLEMA N° 51**

En el triángulo ABC,  $m\angle BAC = 2(m\angle BCA)$ ,  $AB = 8$  y  $AC = 10$ . Calcule BC.

- A) 9                      B) 10                      C) 12  
D) 14                      E) 15

**PROBLEMA N° 52**

En el gráfico,  $m\widehat{CD} = 74^\circ$ , calcule  $AP/PB$ .

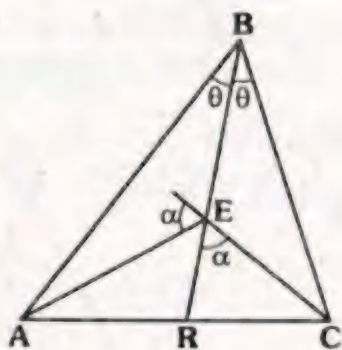


- A) 1                      B)  $\frac{25}{7}$                       C)  $\frac{25}{4}$   
D)  $\frac{25}{8}$                       E)  $\frac{25}{3}$

**PROBLEMA N° 53**

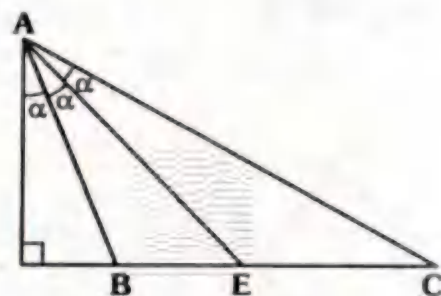
En el gráfico  $4(AB) = 5(BC)$ . Calcule  $AE/ER$ .

- A)  $7/4$   
B)  $3/2$   
C) 2  
D)  $9/4$   
E)  $12/7$



**PROBLEMA N° 54**

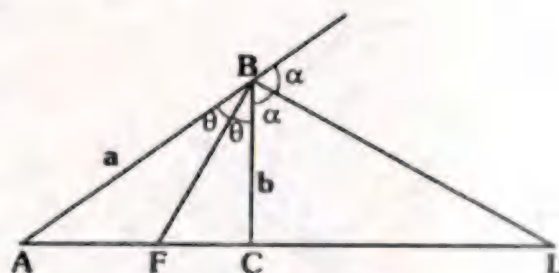
En el gráfico,  $AB = 5$  y  $AC = 9$ . Calcule BE.



- A)  $6/7$                       B) 2                      C)  $15/7$   
D)  $12/7$                       E)  $9/7$

**PROBLEMA N° 55**

En el gráfico, M es punto medio de  $\overline{FL}$ . Halle  $MA/MB$ .



- A) 1                      B)  $\frac{b}{a}$                       C)  $\frac{b^2}{a^2}$   
D)  $\frac{b^3}{a^3}$                       E)  $\sqrt{\frac{b}{a}}$

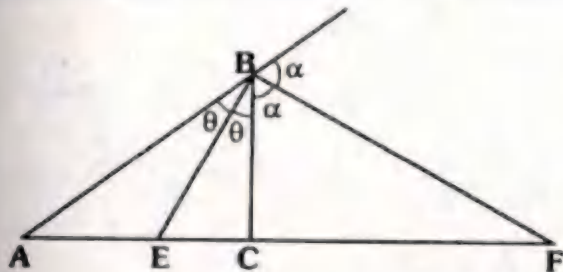
**PROBLEMA N° 56**

Se tiene el cuadrado ABCD de centro O, se ubica P en la prolongación de  $\overline{AD}$ , si  $\overline{OP} \cap \overline{CD} = \{M\}$  y  $OM = MP$ . Calcule  $CM/AP$ .

- A)  $\frac{2}{3}$                       B)  $\frac{3}{4}$                       C)  $\frac{1}{2}$   
D)  $\frac{5}{6}$                       E)  $\frac{1}{3}$

**PROBLEMA N° 57**

En el gráfico,  $\frac{1}{AE} + \frac{1}{AF} = \frac{1}{2}$ . Calcule AC.



- A) 4                      B) 2                      C) 3  
D) 1                      E) 5

**PROBLEMA N° 58**

Se tiene el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BM, en los triángulos AMB y BMC se trazaron las alturas ML y MS respectivamente.

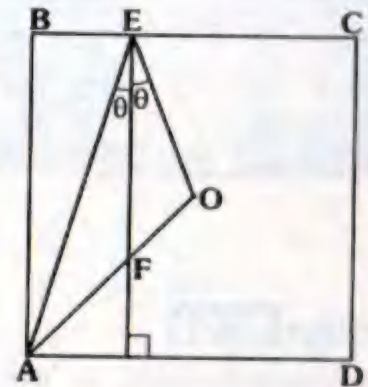
Si  $m\angle LMB = m\angle SMC$  y  $MC = 8(AM) = 8$ . Calcule AB.

- A)  $2\sqrt{2}$                       B) 3                      C)  $3\sqrt{2}$   
D) 4                      E) 6

**PROBLEMA N° 59**

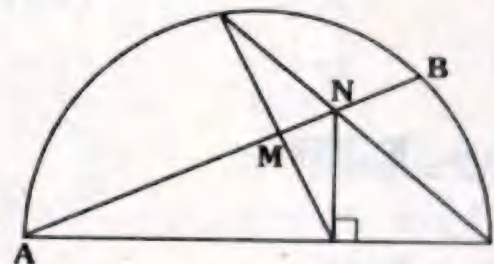
En el gráfico, ABCD es cuadrado de centro O. Si  $FO = \sqrt{2}$ , calcule AB.

- ❖ A) 4  
❖ B) 6  
❖ C) 8  
❖ D) 10  
❖ E) 12



**PROBLEMA N° 60**

En el gráfico,  $AM = a$  y  $MN = b$ . Calcule NB.



- ❖ A)  $\frac{a(a+b)}{a-b}$                       B)  $\frac{(a-b)a}{a+b}$   
❖ C)  $\frac{b(a-b)}{a+b}$                       D)  $\frac{b(a+b)}{a-b}$   
❖ E)  $\frac{ab}{a+b}$





# Problemas Propuestos

## Ciclo Cepre-Uni

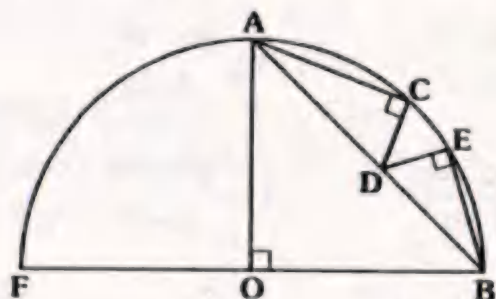
### PROBLEMA N° 61

En un triángulo  $ABC$  se traza una recta paralela al lado  $AC$  que intercepta al lado  $AB$  en el punto  $P$ , a la mediana  $AM$  en el punto  $Q$  y al lado  $BC$  en el punto  $R$ . Si  $PQ=2$  cm y  $QR=5$  cm. Calcule  $AC$  en cm.

- A) 7                      B) 8                      C) 9  
D) 10                    E) 12

### PROBLEMA N° 62

De la figura  $AO=OB=OF$ , si  $\frac{BE}{7} = \frac{DE}{3}$  y  $DC=4$ . Halle  $AC$ .



- A) 4                      B) 5                      C) 6  
D) 7                      E) 8

### PROBLEMA N° 63

Se tiene al triángulo  $ABC$ ,  $AB > BC$ ,  $AB=k_1$  y  $BC=k_2$ . y Se traza la bisectriz exterior  $BP$  ( $P \in AC$ ), luego se traza  $PQ \parallel BC$  ( $Q \in AB$ ). Halle  $PQ$ .

- A)  $\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$                       B)  $\frac{k_1 k_2}{k_1 - k_2}$

- ❖  
❖ C)  $\frac{k_1 k_2}{2k_1 - k_2}$                       D)  $\frac{k_1(k_1 + k_2)}{k_2}$   
❖  
❖ E)  $\frac{k_2(k_1 + k_2)}{k_1 - k_2}$   
❖

### PROBLEMA N° 64

En un triángulo  $ABC$  se traza la bisectriz interior  $BD$  ( $D \in AC$ ) y luego se traza  $DE \parallel AB$  ( $E \in BC$ ). Si  $DE=2$  cm,  $DC=5$  cm y  $AC=8$  cm, entonces la suma de las longitudes de los lados  $AB$  y  $BC$  en cm es:

- ❖ A) 6,5                      B) 7                      C) 8  
❖ D) 8,5                      E) 9  
❖

### PROBLEMA N° 65

En un triángulo  $ABC$ , se trazan la altura  $BH$  y la mediana  $CM$  tales que  $BH \cap CM = E$ . Si  $CE=4(EM)$  y  $EH=2$  cm, entonces la longitud de  $BE$  en cm es:

- ❖ A) 2                      B) 3                      C) 3,5  
❖ D) 4                      E) 4,5  
❖

### PROBLEMA N° 66

❖ En un triángulo  $ABC$  se inscribe una circunferencia tangente a los lados  $AB$ ,  $BC$  y  $AC$  en los puntos  $P$ ,  $Q$  y  $T$  respectivamente. La prolongación de  $PQ$  intercepta a la prolongación de  $AC$  en  $R$ . Si  $AP=m$

y  $CQ=n$  ( $m>n$ ), entonces  $\overline{CR}$  mide:

- A)  $\frac{n(m+2n)}{m-n}$       B)  $\frac{m(m+n)}{m-n}$   
 C)  $\sqrt{mn}$       D)  $\sqrt{\frac{m+n}{2}}$   
 E)  $\frac{n(m+n)}{m-n}$

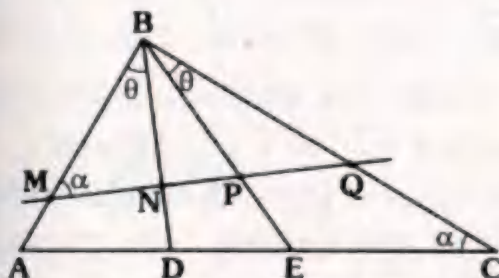
**PROBLEMA N° 67**

En un triángulo  $ABC$ , se inscribe el cuadrado  $PQRS$  ( $\overline{SR} \subset \overline{AC}$ ). Si la altura relativa al lado  $\overline{AC}$  mide  $H$  y  $AC=b$ , entonces la longitud de  $\overline{PQ}$  es:

- A)  $\frac{3bH}{H+2b}$       B)  $\frac{bH}{b+H}$   
 C)  $\sqrt{Hb}$       D)  $2\sqrt{Hb}$   
 E)  $\frac{b+H}{2}$

**PROBLEMA N° 68**

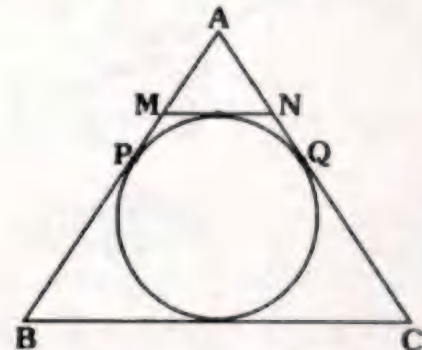
En la figura,  $\overline{BE}$  es una mediana,  $MN=8$ . Halle  $NQ$ .



- A) 6      B) 7      C) 8  
 D) 9      E) 16

**PROBLEMA N° 69**

En la figura,  $AB=BC=a$ ,  $AP=b$  y  $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$ . Calcule  $MN$ .



- A)  $\frac{b^2}{a+b}$       B)  $\frac{ab}{a-b}$   
 C)  $\frac{a^2+b^2}{a+b}$       D)  $\frac{a^2}{a+b}$   
 E)  $\frac{ab}{a+b}$

**PROBLEMA N° 70**

En un triángulo  $ABC$ ,  $AB=c$ ,  $AC=b$ , se traza la mediana  $\overline{BM}$  y la bisectriz  $\overline{AF}$  del  $\angle BAC$ . Si  $\overline{BM} \cap \overline{AF} = \{Q\}$ ,  $\overline{CQ} \cap \overline{AB} = \{K\}$ , calcule  $BK$ .

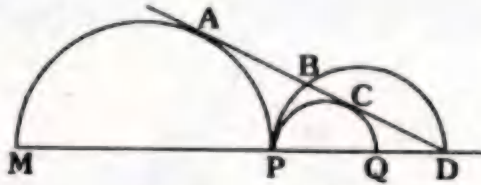
- A)  $\frac{bc}{b+c}$       B)  $\frac{b^2}{b+c}$   
 C)  $\frac{b^2+c^2}{b+c}$       D)  $\frac{c^2}{2b+c}$   
 E)  $\frac{c^2}{b+c}$

**PROBLEMA N° 71**

En la figura mostrada, los puntos  $A$  y  $C$  son puntos de tangencia y los segmentos



$\overline{MP}$ ,  $\overline{PQ}$  y  $\overline{PD}$  son diámetros de las semicircunferencias. Si  $AB=a$ ,  $BC=b$ . Calcule  $CD$ .



- A)  $\frac{ab}{2a+b}$       B)  $\frac{ab}{a+b}$   
 C)  $\sqrt{ab}$       D)  $\frac{b(a+b)}{a-b}$   
 E)  $\sqrt{\frac{a+b}{2}}$

**PROBLEMA N° 72**

En un paralelogramo  $ABCD$  ( $AB < BC$ ),  $Q \in \overline{AC}$ ,  $\overline{QN} \perp \overline{AD}$ ,  $\overline{QM} \perp \overline{AB}$  ( $N \in \overline{AD}$  y  $M \in \overline{AB}$ ). Si  $QM=4\text{cm}$ ,  $QN=3\text{cm}$  y  $BC=8\text{cm}$ , entonces la longitud de  $\overline{AB}$  en cm es:

- A) 4      B) 5      C) 5,5  
 D) 6      E) 7

**PROBLEMA N° 73**

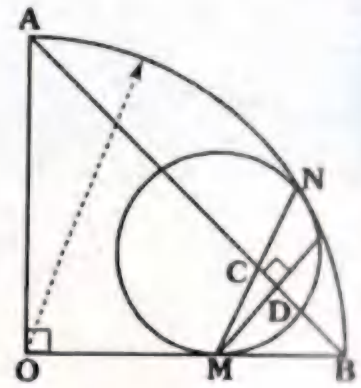
En el triángulo  $ABC$ , se ubica el punto interior  $P$  tal que  $m\angle PAC = m\angle PBA = m\angle PCB$ , se prolonga  $\overline{AP}$  hasta el punto exterior  $Q$ ,  $\overline{BQ} \parallel \overline{AC}$ . Si  $AC=5\text{cm}$ ,  $BQ=4\text{cm}$ . Calcule  $BC$  en cm.

- A) 3      B) 4      C)  $2\sqrt{5}$   
 D)  $\sqrt{22}$       E) 5

**PROBLEMA N° 74**

En la figura,  $M$  y  $N$  son puntos de tangencia. Si  $AD \cdot CD = 6\text{cm}$ . Calcule  $MB$ .

- A)  $3\sqrt{2}$   
 B)  $2\sqrt{3}$   
 C)  $\sqrt{14}$   
 D) 4  
 E) 5



**PROBLEMA N° 75**

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. En un triángulo acutángulo escaleno, la recta de Euler pasa por los puntos notables: ortocentro, incentro y circuncentro.  
 II. El incentro de un triángulo escaleno acutángulo es el ortocentro del triángulo determinado al unir los tres excentros del triángulo acutángulo.  
 III. Dos rectángulos son semejantes.  
 A) VVF      B) FVV  
 C) FVF      D) FFF  
 E) FFV

**PROBLEMA N° 76**

$ABCD$  es un trapecio en donde  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ,  $m\angle ABC = 90^\circ$ ,  $BC < DA$ . Con diámetro  $\overline{AB}$  se traza una semicircunferencia que intercepta a  $\overline{CD}$  en  $E$  y  $F$  ( $DF > DE$ ) y en  $\overline{AB}$  se ubica el punto  $G$  de manera que  $m\angle GFD = 90^\circ$ ,  $CF=8\mu$ ,  $DF=2\mu$ ; halle  $GF$  en  $\mu$ .

- A) 3      B) 4      C) 5  
 D) 5      E) 7

**PROBLEMA N° 77**

En la bisectriz exterior del vértice A de un triángulo ABC recto en B se ubica un punto D tal que  $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ . Si  $BD=2AB=6$ , halle AC.

- A) 4                      B) 5                      C) 6  
D) 4,5                      E) 5,5

**PROBLEMA N° 78**

ABCD es un trapecio rectángulo con,  $m\angle A = 90^\circ$ ,  $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$  ( $BC < AD$ ). En la prolongación de  $\overline{AB}$  se ubica el punto E tal que  $\overline{ED} \cap \overline{BC} = \{F\}$ . Sea L la recta que contiene a  $\overline{AB}$  y con diámetros en L se trazan las semicircunferencias  $C_1$  y  $C_2$  de diámetros  $\overline{EI}$  y  $\overline{EG}$  tal que  $C_1 \cap \overline{AD} = \{J\}$ ,  $F \in C_1$ , C y  $D \in C_2$  y  $EC=10\mu$ .

Halle EJ en  $\mu$ .

- A) 7                      B) 8                      C) 9  
D) 10                      E) 11

**PROBLEMA N° 79**

Halle el radio en  $\mu$  de la circunferencia circunscrita a un triángulo cuyos lados miden  $15\mu$ ,  $15\mu$  y  $24\mu$ .

- A) 10,5                      B) 11                      C) 12,5  
D) 13                      E) 14

**PROBLEMA N° 80**

Con centro en un punto O de una circunferencia  $C_1$ , de radio R se traza una circunferencia  $C_2$  de radio r, ( $r < R$ ), L es una recta tangente a  $C_2$  en T y secante a  $C_1$ , en A y B. Entonces el producto de las pro-

yecciones de OT a los segmentos OA y OB es:

- A)  $\frac{R^4}{r^2}$                       B)  $\frac{r^4}{R^2}$                       C)  $\frac{r^3}{2R}$   
D)  $\frac{rR}{2}$                       E)  $R^2 - r^2$

**PROBLEMA N° 81**

En un paralelogramo ABCD se ubica E en  $\overline{BC}$  de manera que  $\overline{AE}$  sea bisectriz del ángulo BAD. La mediatriz de  $\overline{AE}$  intercepta a  $\overline{AD}$  en F,  $\overline{GH} \perp \overline{BC}$  siendo G punto medio de  $\overline{AE}$  y H un punto de  $\overline{BE}$ . Si  $(AF)(BH)=16u^2$ , halle GF en u.

- A) 3                      B) 4                      C) 5  
D) 6                      E) 7

**PROBLEMA N° 82**

En una semicircunferencia  $C_1$  de diámetro  $\overline{AB}$  y centro O se traza con diámetro  $\overline{AO}$  otra circunferencia  $C_2$  en su interior. C en un punto de  $C_1$  y W de  $\overline{AO}$  tal que  $BW=8(WO)$  y  $\overline{CW}$  intercepta a  $C_2$  en D. Si  $BC=20u$ , halle DO en u.

- A) 1                      B) 2                      C) 2,5  
D) 4                      E) 5

**PROBLEMA N° 83**

C es una circunferencia de centro O y radio R y ABC es un triángulo inscrito. Por el punto medio M de  $\overline{AB}$  se trazan perpendiculares a los radios  $\overline{AO}$  y  $\overline{OB}$  que interceptan a  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$  en D y E respectivamente; si  $ME \cdot MD=4R$ , halle la distancia



de B a  $\overline{ME}$ .

- A) 2                      B) 3                      C) 4  
D) 5                      E) 6

**PROBLEMA N° 84**

En un triángulo rectángulo ABC recto en B se traza la altura BH. Si el producto de la hipotenusa por las distancias del punto H a los catetos del triángulo ABC es  $27000u^3$ , halle BH en u.

- A) 10                      B) 15                      C) 20  
D) 25                      E) 30

**PROBLEMA N° 85**

En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior AP, se ubica Q en  $\overline{AC}$  tal que  $\overline{AP} \cap \overline{BQ} = \{R\}$ . Si  $RB=BP$ ,  $PC=b$  y  $RQ=a$ . Calcule BR.

- A)  $a+b$                       B)  $\sqrt{ab}$                       C)  $\frac{a+b}{2}$   
D)  $\sqrt{2ab}$                       E)  $\sqrt{a^2+b^2}$

**PROBLEMA N° 86**

En un triángulo ABC,  $AB=6u$ , la distancia del ortocentro al vértice C es de  $8u$ . Halle el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en u.

- A) 2                      B) 3                      C) 4  
D) 5                      E) 6

**PROBLEMA N° 87**

En un triángulo ABC, recto en B, se traza la altura  $\overline{BH}$ , se ubican los puntos T y W en  $\overline{BC}$  y  $\overline{AC}$  respectivamente tal que  $\overline{TW} \perp \overline{AC}$ ,  $AH=WC$ ,  $BH=4TW$  y

$AB=8u$ ; Halle BT en u.

- A) 9                      B) 10                      C) 11  
D) 12                      E) 13

**PROBLEMA N° 88**

En un cuadrilátero convexo, ABCD, la  $m\angle A = 90^\circ$ , por B y C se trazan las rectas paralelas a  $\overline{DC}$  y  $\overline{AB}$  que interceptan a sus diagonales en M y N respectivamente. Si  $MC=17u$  y  $CN=15u$ , halle MN en u.

- A) 6                      B) 7                      C) 8  
D) 9                      E) 10

**PROBLEMA N° 89**

En un triángulo ABC recto en B, se traza la ceviana  $\overline{CM}$ , que intercepta a la bisectriz interior  $\overline{AN}$  en W, la prolongación de  $\overline{MN}$  intercepta a la bisectriz exterior del vértice B en un punto de la prolongación de  $\overline{AC}$ . Si  $MW=8\sqrt{2}u$ ,  $WN=7$ , halle MN.

- A)  $7\sqrt{2}$                       B) 14                      C) 16  
D) 17                      E) 18

**PROBLEMA N° 90**

Sea el triángulo ABC; P, D y Q pertenecen a los lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{AC}$  tal que  $\overline{PQ} \parallel \overline{BC}$ ,  $\overline{PD} \cap \overline{AQ} = \{E\}$  y Q es punto medio de  $\overline{AE}$ , si  $AP=9$ ,  $PB=6$  y  $PD=8$ . Calcule DE.

- A) 3                      B) 4                      C) 5  
D) 6                      E) 7

**PROBLEMA N° 91**

En un triángulo ABC, se trazan las cevianas AD y BE que intersecan en el punto O, por D se traza una paralela a BE que corta a AC en F. Si  $AF=FC$ ,  $BD=6$ ,  $CD=9$ ,  $OD=8$ . Halle AO.

- A) 2,5                      B) 3                      C) 3,5  
D) 4                      E) 4,5

**PROBLEMA N° 92**

En un cuadrilátero convexo ABCD la recta que contiene a los puntos medios de AC y BD intercepta a AB y CD en P y Q respectivamente. Si  $AB=a$  y  $CD=b$ .

Calcule BP/QD.

- A)  $\frac{a}{b}$                       B)  $\frac{b}{a}$                       C)  $\frac{a+b}{a}$   
D)  $\frac{a}{a+b}$                       E)  $\frac{b}{a+b}$

**PROBLEMA N° 93**

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Si por 3 puntos equidistantes de una recta, se trazan paralelas, estas determinan sobre otra recta secante segmentos congruentes.
- II. Si una recta biseca a un lado de un triángulo y es paralela a otro lado, biseca también al tercer lado.
- III. Tres o más rectas paralelas determinan en dos rectas secantes cualquiera, segmentos proporcionales.

- A) FVF                      B) VVF  
C) VVV                      D) FFF  
E) FFV

**PROBLEMA N° 94**

En un triángulo ABC se tiene que  $BC=2AB$ . Las bisectrices interiores de los ángulos A y C interceptan a la mediana BM en los puntos P y Q, tal que BP es menor que BQ. Si  $BP=3u$  y  $QM=2u$ , entonces PQ es:

- A) 1                      B) 2                      C) 3  
D) 4                      E) 5

**PROBLEMA N° 95**

En un triángulo ABC se trazan las cevianas interiores BM y BN tal que:  $\frac{AM}{NC} = \frac{3}{10}$ ,  $\frac{AN}{MC} = \frac{3}{2}$  y  $m\angle ABM = m\angle MBN = m\angle NBC$ .

Calcule  $m\angle MBN$ .

- A)  $22^\circ 33'$                       B)  $30^\circ$                       C)  $40^\circ$   
D)  $45^\circ$                       E)  $53^\circ$

**PROBLEMA N° 96**

En un triángulo ABC,  $AB=c$ ,  $BC=a$ , el segmento que une el incentro con el baricentro es paralelo al lado AC. Halle la longitud de AC.

- A)  $\frac{ac}{a+c}$                       B)  $\sqrt{ac}$                       C)  $\sqrt{2ac}$   
D)  $\frac{a+c}{2}$                       E)  $\sqrt{a^2+c^2}$

**PROBLEMA N° 97**

El perímetro de un triángulo ABC es  $25u$ , la bisectriz interior AD mide  $10u$  si:  $BC=5u$ . Calcule la distancia del incentro al vértice A.

- A)  $5u$                       B)  $6u$                       C)  $7u$   
D)  $8u$                       E)  $9u$



**PROBLEMA N° 98**

Por el incentro de un triángulo ABC, se trazan paralelas IM y IN a los lados AB y BC respectivamente, donde M y N son puntos del lado AC. Si:  $AB=5$ ,  $BC=7$  y  $AC=6$ . Halle MN.

- A) 1                      B) 1,5                      C) 2  
D) 2,5                      E) 3

**PROBLEMA N° 99**

En un triángulo ABC, una recta exterior interseca a las prolongaciones de  $\overline{BA}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{AC}$  en P, Q y R respectivamente.  $PA=2AB$ ,  $2QC=BC$ , siendo  $AC=b$ , halle: CR.

- A)  $b/3$                       B)  $b/2$                       C)  $b$   
D)  $2b$                       E)  $3b$

**PROBLEMA N° 100**

En un triángulo ABC se trazan las cevianas interiores  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BE}$  y  $\overline{CF}$  intersecándose en

I; si  $\frac{BF}{FA} + \frac{BD}{DC} = \frac{2}{3}$  y  $BI=2\text{dm}$ , entonces IE en dm es:

- A) 2,0                      B) 2,5                      C) 3,0  
D) 3,5                      E) 4,0

**PROBLEMA N° 101**

En un triángulo ABC se trazan la bisectriz  $\overline{CP}$  y la mediana  $\overline{AQ}$ , la prolongación de  $\overline{PQ}$  interseca a la prolongación de  $\overline{AC}$  en R siendo:  $BC=a$ ,  $AC=b$ . Halle CR.

- A)  $\frac{ab}{a-b}$                       B)  $\frac{ab}{a+b}$                       C)  $\frac{2ab}{a+b}$   
D)  $\frac{ab}{b-a}$                       E)  $\sqrt{ab}$

**PROBLEMA N° 102**

En una recta L se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D con diámetros  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  se trazan las semicircunferencias  $C_1$  y  $C_2$  en un mismo semiplano,  $L_2$  es recta tangente a  $C_1$  y  $C_2$  en T y S respectivamente, las prolongaciones de  $\overline{TB}$  y  $\overline{SC}$  se interceptan en el punto Q, en  $\overline{TS}$  se ubica E de manera que  $m\angle TBE = 90^\circ$ ,  $TB=8u$ ,  $TE=4$  ES. Halle BQ en u.

- A) 1,5                      B) 2                      C) 3  
D) 4                      E) 5

**PROBLEMA N° 103**

Sea una circunferencia de centro I, inscrita en un triángulo ABC,  $AB=13\text{cm}$ ,  $BC=14\text{cm}$  y  $AC=15\text{cm}$ .  $P \in \overline{BC}$  y es punto de tangencia;  $Q \in \overline{BC}$  tal que  $\overline{AQ}$  es bisectriz del ángulo A. Calcule PQ.

- A)  $1/6$                       B)  $1/5$                       C)  $1/4$   
D)  $1/3$                       E)  $1/2$

**PROBLEMA N° 104**

Sea el trapezoide asimétrico ABCD, M y N son puntos medios de las diagonales  $\overline{AC}$  y  $\overline{BD}$ ; E y F pertenecen a  $\overline{AB}$  y  $\overline{CD}$  tal que E, M, N y F son colineales.  $BE=3$ ,  $AE=9$  y  $FD=4$ . Halle FC.

- A) 10                      B) 11                      C) 12  
D) 13                      E) 14

**PROBLEMA N° 105**

En un triángulo ABC, se traza la mediana  $\overline{BM}$ , en los triángulos ABM y BMC se trazan las bisectrices  $\overline{AD}$  y  $\overline{CE}$  (D y E están

en  $\overline{BM}$ ). Si  $BD=3$ ,  $EM=2$  y  $\frac{AB+BC}{AC}=\frac{3}{2}$ .  
Halle DE.

- A)  $1/5$                       B)  $1/4$                       C)  $1/3$   
D)  $1/2$                       E)  $1$

### PROBLEMA N° 106

En un triángulo ABC, se trazan la bisectriz  $\overline{CP}$  y la mediana  $\overline{AQ}$ ,  $\overline{CP} \cap \overline{AQ} = \{O\}$ ,  $\overline{BO} \cap \overline{AC} = \{R\}$ , siendo:  $BC=a$ ,  $AC=b$ .  
Halle CR.

- A)  $\frac{ab}{a-b}$                       B)  $\frac{ab}{a+b}$                       C)  $\frac{2ab}{a+b}$   
D)  $\frac{a+b}{2}$                       E)  $\sqrt{ab}$

### PROBLEMA N° 107

En un cuadrilátero ABCD,  $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{DC} = \{P\}$ ,  $\overrightarrow{BC} \cap \overrightarrow{AD} = \{Q\}$ ,  $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{O\}$ ,  $\overline{PO} \cap \overline{AD} = \{F\}$ ,  $AF=a$ ,  $FD=b$ . Halle DQ.

- A)  $\frac{ab}{a+b}$                       B)  $\frac{2ab}{a+b}$   
C)  $\frac{(a+b)b}{a-b}$                       D)  $\frac{(a+b)a}{a-b}$   
E)  $a+b$

### PROBLEMA N° 108

En un triángulo ABC se traza la mediana  $\overline{AM}$  y se ubica D en  $\overline{AM}$ , la distancia de D a  $\overline{AB}$  mide 3 dm, si  $AB=9$  dm y  $AC=12$  dm, entonces la distancia de D al lado  $\overline{AC}$  mide (en dm)

- A)  $5/6$                       B)  $3/2$                       C)  $7/4$   
D)  $2$                       E)  $9/4$

### PROBLEMA N° 109

- En un triángulo ABC, la mediatriz de  $\overline{AC}$  intercepta a  $\overline{BC}$  en P y a la prolongación de  $\overline{AB}$  en Q. Si  $OP \times OQ = 36 \text{ m}^2$ .  
Halle el radio si O es el circuncentro.  
A) 3 m                      B) 4 m                      C) 5 m  
D) 6 m                      E) 7 m

### PROBLEMA N° 110

- En un paralelogramo ABCD se ubican E, F y H en las prolongaciones de  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AD}$  y  $\overline{AC}$  respectivamente, tal que:  
 $m\angle AEH = m\angle AFH = 90^\circ$ , si  $AB=a$ ,  $BC=b$  y  $HF=c$ , entonces HE es:

- A)  $\frac{bc}{a}$                       B)  $\frac{ab}{c}$                       C)  $\frac{ac}{b}$   
D)  $\frac{a}{bc}$                       E)  $\frac{b}{ac}$

### PROBLEMA N° 111

- En un triángulo rectángulo ABC (recto en B) se trazan la altura  $\overline{BH}$ ,  $\overline{HD} \parallel \overline{CB}$  (D en  $\overline{AB}$ ),  $\overline{HE} \parallel \overline{AB}$  (E en  $\overline{BC}$ ),  $\overline{DF} \parallel \overline{BH}$  (F en  $\overline{AH}$ ),  $\overline{EM} \parallel \overline{BH}$  (M en  $\overline{HC}$ ),  $\overline{MN} \parallel \overline{CE}$  (N en  $\overline{HE}$ ) y  $\overline{NQ} \parallel \overline{BH}$  (Q en  $\overline{HM}$ ), si  $DF=a$  y  $EM=b$ , entonces NQ es:

- A)  $\sqrt{b^2 - a^2}$                       B)  $\sqrt{ab}$                       C)  $\frac{ab}{a+b}$   
D)  $\frac{2ab}{a+b}$                       E)  $2\sqrt{ab}$

### PROBLEMA N° 112

- Sea el paralelogramo ABCD, P es un punto cualquiera de la diagonal  $\overline{AC}$ . E, H, F



y G son puntos de los lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  y  $\overline{AD}$ ; E, P y F son colineales, y H, P y G también son colineales. Demostrar que: los triángulos: PHF y PEG son semejantes.

**PROBLEMA N° 113**

Sea P un punto de una circunferencia de radio R, con centro en P se traza una circunferencia de radio r ( $r < R$ ). En la primera circunferencia se traza una cuerda AB tangente a la segunda. Halle: PA.PB.

- A)  $\frac{Rr}{2}$                       B) Rr                      C) 2Rr  
D) 3Rr                      E) 4Rr

**PROBLEMA N° 114**

Sea el trapecio PQTE,  $QT=b$ ,  $PE=B$ ,  $\overline{PT} \cap \overline{QE} = \{F\}$ ,  $M \in \overline{PQ}$  y  $N \in \overline{TE}$  tal que M, F y N son colineales. Demuestre que:

- A)  $MF=FN$                       B)  $MN = \frac{2B \times b}{B+b}$

**PROBLEMA N° 115**

Se tiene dos semicircunferencias tangentes exteriormente de diámetros  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  colineales, luego se traza la tangente común exterior MN, M en la primera semicircunferencia y N en la segunda. Si:  $AM \cap CN = \{D\}$ ,  $AB=2a$  y  $BC=2b$ , entonces la distancia de D a  $\overline{MN}$  es:

- A)  $\frac{ab}{a+b}$                       B)  $\frac{2ab}{a+b}$                       C)  $\frac{3ab}{a+b}$   
D)  $\frac{ab}{2(a+b)}$                       E)  $\frac{a+b}{ab}$

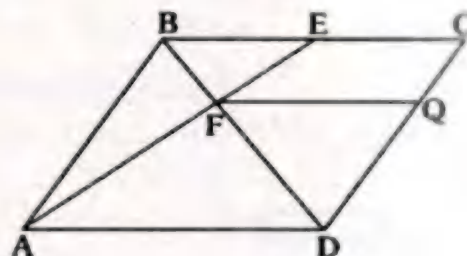
**PROBLEMA N° 116**

Halle la distancia de un punto de una circunferencia hacia una cuerda, si se sabe que las distancias de dicho punto hacia las rectas tangentes trazadas por los extremos de dicha cuerda, son de 16 y 25.

- A) 12                      B) 14                      C) 16  
D) 18                      E) 20

**PROBLEMA N° 117**

En la figura, ABCD es un paralelogramo  $\overline{FQ} \parallel \overline{AD}$ ,  $BE=a$ ,  $EC=b$ . Calcule FQ.



- A)  $\frac{ab}{a+b}$                       B)  $\frac{2ab}{a+b}$   
C)  $\sqrt{ab}$                       D)  $\frac{(a+b)2}{2a+b}$   
E)  $\frac{a^2+b^2}{a+b}$

**PROBLEMA N° 118**

Se tiene un triángulo escaleno ABC inscrito en una circunferencia, tal que la recta que contiene a la bisectriz exterior de B intercepta en F a la prolongación de AC y en M a la circunferencia circunscrita.  $BC=3m$ ,  $BF=9m$ ,  $BM=4m$ . Halle AB.

- A) 10                      B) 11                      C) 12  
D) 13                      E) 14

**PROBLEMA N° 119**

Un cuadrilátero ABCD esta inscrito en una circunferencia de diámetro AD. Se trazan las perpendiculares BM y CN hacia el diámetro AD, de modo que  $AM=4$ ,  $MN=7$  y  $ND=9$ . Halle la distancia desde D hacia la recta BC.

- A) 8                      B) 9                      C) 10  
D) 11                    E) 12

**PROBLEMA N° 120**

En un triángulo rectángulo ABC recto en B, se trazan las rectas tangentes PE y QF a la circunferencia inscrita donde P pertenece a AB, Q pertenece a BC y; E y F pertenecen a AC: Si  $PE \perp AC$   $PE \parallel QF$ ,  $AE=8$ ,  $CF=9$ . Halle el inradio de la circunferencia inscrita al triángulo ABC.

- A) 6                      B) 6,5                      C) 8  
D) 8,5                    E) 9

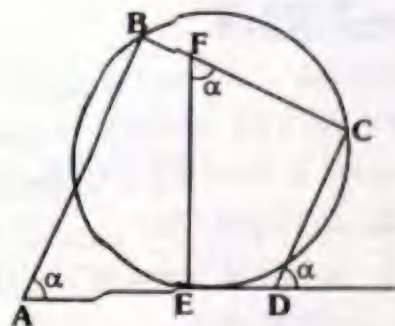
**PROBLEMA N° 121**

Dos circunferencias son tangentes interiormente en el punto F. En la circunferencia mayor se traza la cuerda AB que es tangente a la otra circunferencia en el punto E. La prolongación del segmento FE intercepta a la circunferencia en el punto H. Si  $FE=4$ ,  $EH=5$ . Halle AH.

- A) 5                      B) 6                      C) 7  
D) 8                      E) 9

**PROBLEMA N° 122**

En la figura, E es punto de tangencia,  $AB=e$ ,  $CD=f$ . Calcule EF.

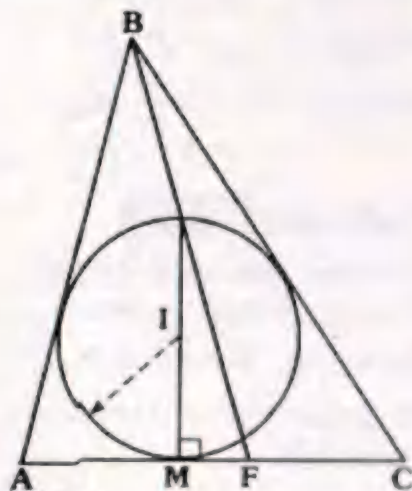


- A)  $\frac{e+f}{2}$                       B)  $\frac{2ef}{e+f}$                       C)  $\sqrt{ef}$   
D)  $\sqrt{\frac{ef}{2}}$                       E)  $\sqrt{\frac{ef}{e+f}}$

**PROBLEMA N° 123**

En una figura I es el incentro del triángulo ABC, M es punto de tangencia. Si:  $AM=k$ , calcule FC.

- A)  $\frac{k}{2}$   
B) k  
C)  $\frac{3k}{2}$   
D)  $\frac{5k}{2}$   
E) 3k

**PROBLEMA N° 124**

En un triángulo ABC, recto en B se traza la altura BH, luego se ubican los puntos medios, M de BC y N de BH tal que  $AM=2AN$ . Halle la  $m\angle C$ .

- A)  $15^\circ$                       B)  $\frac{53^\circ}{2}$                       C)  $\frac{37^\circ}{2}$   
D)  $30^\circ$                       E)  $\frac{45^\circ}{2}$



**PROBLEMA N° 125**

En un triángulo ABC se trazan las alturas CM y AH; en AC se ubica el punto E y en el exterior y relativo a AC se ubica el punto D tal que  $ED=EC$   $T \in MD$ ,  $ET \perp MD$ ,  $m\angle ACB = m\angle MDE$ ,  $MT=TD$ , si  $TE=5$ . Calcule AH.

- A) 5                      B) 7                      C) 9  
D) 10                     E) 11

**PROBLEMA N° 126**

En un paralelogramo ABCD se traza una recta que pasa por el vértice D se intercepta a AC y BC y a la prolongación de AB en los puntos R, Q y P respectivamente. Si  $QR=3u$ ,  $RD=4u$ . Halle PQ(en u)

- A) 1/3                      B) 2/3                      C) 4/3  
D) 5/3                     E) 7/3

**PROBLEMA N° 127**

Se tiene una circunferencia inscrita en un triángulo ABC,  $AB=9\text{cm}$ ,  $BC=7\text{cm}$  y  $AC=8\text{cm}$ ,  $M \in AB$  y  $N \in BC$  tal que MN es tangente a la circunferencia  $MN \parallel AC$ . Halle MN.

- A) 1/3                      B) 2/3                      C) 4/3  
D) 5/3                     E) 8/3

**PROBLEMA N° 128**

En un paralelogramo ABCD,  $AB=9u$ ,  $AD=12u$ , se ubica el punto P en AC, sobre su diagonal de manera que la distancia de P a AB es  $6u$ , calcule la distancia de P al lado AD.

- ❖ A) 1,5                      B) 2,5                      C) 3,5  
❖ D) 4,5                      E) 5,5

**PROBLEMA N° 129**

❖ En una circunferencia de centro A y radio R, se ubica un punto B. Luego con centro en B se traza una circunferencia secante a la primera circunferencia. Una cuerda EF de la primera circunferencia al prolongarse es tangente en Q a la otra circunferencia. Si:  $(BE)(BF)=K$ , calcule el radio de la circunferencia de centro B.

- ❖ A)  $\frac{K}{4R}$                       B)  $\frac{K}{2R}$                       C)  $\frac{K}{R}$   
❖ D)  $\frac{2K}{R}$                       E)  $\frac{4K}{R}$

**PROBLEMA N° 130**

❖ Se tiene el triángulo ABC,  $AB=9$ ,  $BC=4$ ,  $AC=6$ ; en la prolongación de CB se ubica un punto E; en la prolongación de AB se ubica un punto D; las prolongaciones de ED y AC se intersectan en Q;  $BD=6$  y  $BE=8$ , halle CQ.

- ❖ A)  $\frac{32}{9}$                       B) 2                      C) 3  
❖ D) 9                      E) 11

**PROBLEMA N° 131**

❖ Se tiene el triángulo ABC,  $AB=c$ ,  $BC=a$ ,  $AC=b$ . Por el incentro I se traza IQ paralela al lado AB, que interseca al lado AC en Q. Calcule QC.

- ❖ A)  $\frac{(a+b)a}{a+b+c}$                       B)  $\frac{(a+b)b}{a+b+c}$

C)  $\frac{(a+c)c}{a+b+c}$

D)  $\frac{b(b+c)}{a+b+c}$

E)  $\frac{c(a+b)}{a+b+c}$

**PROBLEMA N° 132**

Desde un punto P exterior a una circunferencia de centro O se trazan las tangentes PA y PB, y además una recta PQ exterior a la circunferencia. Se traza  $\overline{OF}$  perpendicular a PQ ( $F \in PQ$ ) que interseca a  $\overline{BA}$  en E;  $OE=a$  y  $EF=b$ , calcule el radio de la circunferencia.

A)  $\sqrt{a(a+b)}$  B)  $\frac{ab}{a+b}$  C)  $\sqrt{ab}$

D)  $\sqrt{b(a+b)}$  E)  $2\sqrt{ab}$

**PROBLEMA N° 133**

En un paralelogramo ABCD, por el vértice A se traza una recta que intersecta a la prolongación del lado  $\overline{DC}$  en el punto N. La altura  $\overline{DH}$  ( $H \in \overline{AB}$ ) del paralelogramo intersecta a  $\overline{AN}$  en el punto M. Si  $m\angle DAN = 2m\angle BAN$  y  $BC=18u$ , entonces la longitud (en u) de  $\overline{MN}$  es:

A) 18 B) 27 C) 36

D) 48 E) 56

**PROBLEMA N° 134**

En un cuadrado ABCD cuyo centro es O, se ubican en el lado  $\overline{BC}$  y  $\overline{CD}$  los puntos P y Q respectivamente de manera que la prolongación de  $\overline{PO}$  es perpendicular a  $\overline{AQ}$ . Si  $CQ=4u$ . Calcule BP(en u)

❖ A) 1

B) 2

C) 3

❖ D) 4

E) 5

❖

**PROBLEMA N° 135**

❖ En la figura mostrada,  $BC=6$  y  
❖  $PQ \cdot AC=10$ . Halle PC.

❖

❖ A)  $2\sqrt{2}$

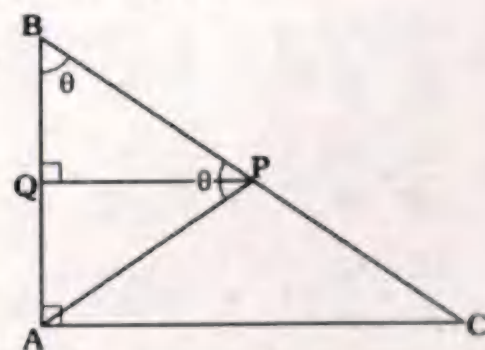
❖ B) 3

❖ C) 4

❖ D) 5

❖ E) 6

❖



❖

**PROBLEMA N° 136**

❖ Un triángulo ABC, se traza la ceviana  $\overline{BD}$  ( $D \in \overline{AC}$ ). En  $\overline{AD}$ ,  $\overline{BD}$  y  $\overline{DC}$  se ubican los puntos E, F y G tal que  $\overline{EP} \parallel \overline{AB}$ ,  
❖  $\overline{FG} \parallel \overline{BC}$ . Si  $AE=m$ ,  $ED=n$  y  $DG=q$ , entonces la longitud de  $\overline{GC}$  es:

❖ A)  $\frac{nm}{q+n}$

B)  $\frac{mq}{m+n}$

C)  $\frac{mn}{q}$

❖ D)  $\frac{mq}{n}$

E)  $\frac{nq}{m}$

❖

**PROBLEMA N° 137**

❖ Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

❖ I. Dos triángulos equiláteros son semejantes.

❖ II. Dos triángulos rectángulos isósceles, son semejantes.

❖ III. Dos polígonos regulares son semejantes.

❖ A) VVV

B) VVF

C) FFV

❖ D) FFF

E) VFF

❖



**PROBLEMA N° 138**

En un paralelogramo ABCD, por el vértice C se traza una recta que intercepta a las prolongaciones de los lados  $\overline{AB}$  y  $\overline{AD}$  en E y F respectivamente. Entonces ¿Cuál de las siguientes relaciones es la correcta?

- A)  $\frac{AB}{AE} - \frac{AD}{AF} = 1$       B)  $\frac{AB}{AE} + \frac{AD}{AF} = 1$   
 C)  $\frac{AE}{AB} + \frac{AD}{AF} = 1$       D)  $\frac{AF}{AD} + \frac{AB}{AE} = 1$   
 E)  $\frac{AE}{AD} + \frac{AB}{AF} = 1$

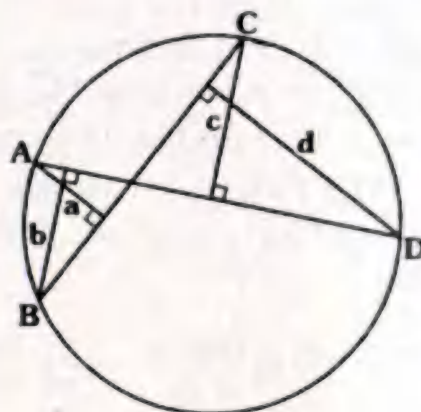
**PROBLEMA N° 139**

C es un punto de  $\overline{AB}$ , tal que  $\overline{AC}$  es media proporcional de  $\overline{AB}$  y  $\overline{CB}$ . Si  $\frac{1}{AC} + \frac{1}{CB} = (2 + \sqrt{5})$ , entonces la longitud de  $\overline{AB}$  es:

- ❖ A)  $\frac{1}{4}$       B)  $\frac{1}{3}$       C)  $\frac{1}{2}$   
 ❖ D) 1      E)  $\frac{3}{2}$

**PROBLEMA N° 140**

❖ En la figura mostrada, hallar la relación existente entre a, b, c y d.



- ❖ A)  $ab = cd$       B)  $ac = bd$   
 ❖ C)  $ad = bc$       D)  $a + b = c + d$   
 ❖ E)  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$



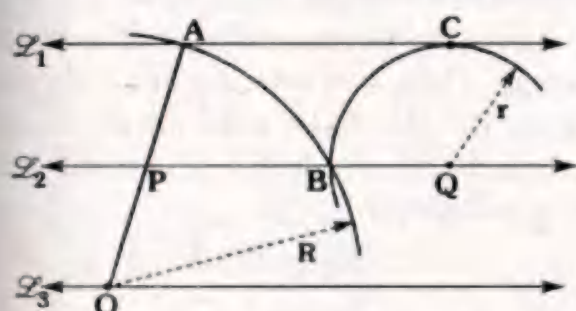


# Problemas Propuestos

## Ciclo Semestral

### PROBLEMA N° 141

Si  $\vec{\mathcal{L}}_1 \parallel \vec{\mathcal{L}}_2 \parallel \vec{\mathcal{L}}_3$ ,  $AP=15$ ,  $R=40$ ,  $r=12$  y  $m\widehat{BC} = 90^\circ$ . Calcule  $m\widehat{AB}$ .

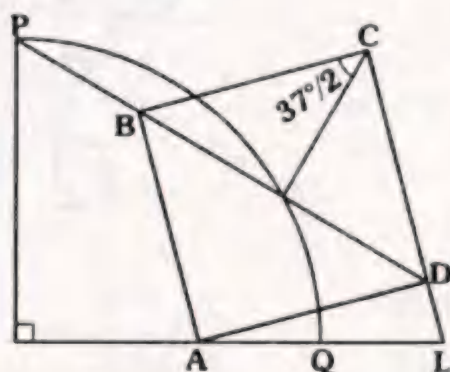


- A)  $37^\circ$       B)  $14^\circ$       C)  $30^\circ$   
D)  $23^\circ$       E)  $7^\circ$

### PROBLEMA N° 142

En el gráfico, ABCD es un cuadrado. Calcule  $AQ/QL$ .

- A)  $1/2$   
B)  $1/3$   
C)  $1/4$   
D)  $2/3$   
E)  $3/4$



### PROBLEMA N° 143

En el lado CD del trapecio ABCD se ubican M y N ( $M \in \overline{CN}$ ) tal que  $\overline{BM} \parallel \overline{AD}$ ,  $\overline{AN} \parallel \overline{BC}$ ,  $\overline{MB} \cap \overline{AC} = \{P\}$ ,  $\overline{AN} \cap \overline{BD} = \{Q\}$

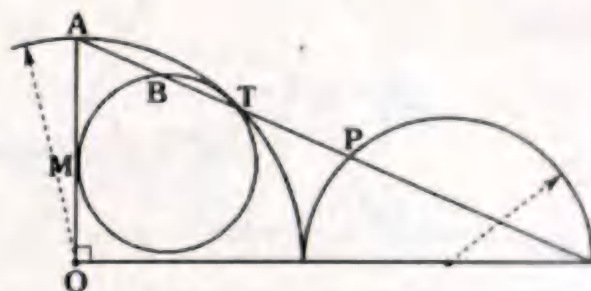
- ❖ y las diagonales se cortan en O. Si  $AO=5$ ,
- ❖  $OP=1$ ,  $PC=3$  y  $ND=5$ . Calcule CN.
- ❖ A) 1      B) 2      C) 3
- ❖ D) 4      E) 5

### PROBLEMA N° 144

- ❖ En el triángulo isósceles ABC de base  $\overline{AC}$
- ❖ en  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{AC}$  se ubican los puntos M,
- ❖ N y P respectivamente, tal que  $AP=PM$  y
- ❖  $NP=PC$ . Si  $\overline{AN}$  y  $\overline{CM}$  se intersecan en Q
- ❖ y  $\frac{AQ}{3} = \frac{QN}{7} = \frac{MQ}{2}$ . Calcule  $\frac{AP}{PC}$ .
- ❖ A)  $2/7$       B)  $3/7$       C)  $1/4$
- ❖ D)  $3/8$       E)  $1/2$

### PROBLEMA N° 145

- ❖ En el gráfico, M, T y Q son puntos de tangencia y  $AM=MO$ . Calcule  $TP/AB$ .

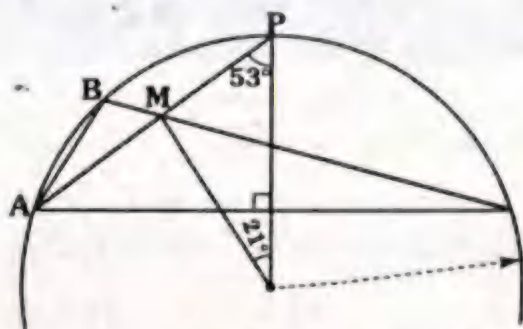


- ❖ A)  $\sqrt{2}$       B)  $\frac{8}{5}$       C)  $\frac{3\sqrt{5}}{4}$
- ❖ D)  $\frac{4\sqrt{5}}{5}$       E)  $\frac{4\sqrt{5}}{7}$



**PROBLEMA N° 146**

En el gráfico,  $AB=18$ . Calcule  $BM$ .



- A) 9                      B) 4,5                      C) 5,5  
D) 2,4                      E) 5,75

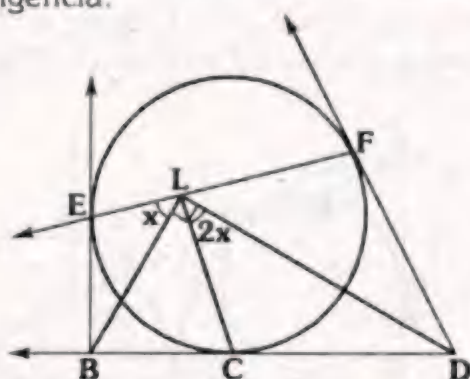
**PROBLEMA Nº 147**

En el triángulo ABC:  $AB=8$ ,  $BC=10$  y  $AC=12$ . Calcule la medida del segmento paralelo al  $\overline{AC}$  que contiene al incentro y cuyos extremos se ubican en  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$ .

- A) 3                      B) 4,2                      C) 6  
D) 7,2                      E) 9

**PROBLEMA N° 148**

Según el diagrama, calcule  $x$ . C, E, F: puntos de tangencia.



- A)  $15^\circ$   
B)  $20^\circ$   
C)  $25^\circ$   
D)  $30^\circ$   
E)  $37^\circ$

**PROBLEMA N° 149**

Se tiene una semicircunferencia de diámetro  $\overline{AF}$  y centro  $O$ . Por  $A$  se levanta el  $\overline{AB}$  perpendicular al  $\overline{AF}$ . Luego se traza el seg-

- ❖ mento tangente BD. La prolongación del  
❖  $\overline{DO}$  corta a la prolongación del  $\overline{BA}$  en E.  
❖ En la prolongación del  $\overline{ED}$  se toma C, tal  
❖ que  $m\widehat{FD} = 2(m\angle BCD)$ ,  $OD = 1$  y  $EO = 3$ .  
❖ Calcule CD.
- ❖ A) 1                      B) 2                      C)  $\sqrt{2}$   
❖  
❖ D)  $\sqrt{3}$                       E)  $\sqrt{6}$

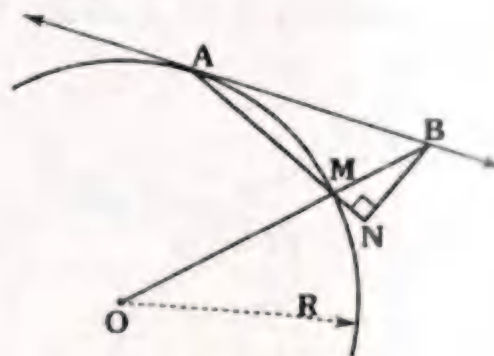
**PROBLEMA N° 150**

Un cuadrilátero está inscrito en una circunferencia. Calcule la relación entre los productos de las distancias de un punto aférente hacia dos lados opuestos de dicho cuadrilátero.

- ❖ A) 1                      B) 0,5                      C) 2  
❖ D)  $\sqrt{2}$                       E) FD

**PROBLEMA Nº 151**

Si  $AM=7$ ,  $MN=1$  y "A" es punto de tangencia, calcule R.



- ❖ A) 10,5      B) 11,5      C)  $5\sqrt{2}$   
❖ D) 12      E) 12,5

**PROBLEMA N° 152**

- ❖ Si "E" es el excentro relativo a AC del
- ❖ triángulo ABC,  $AB=3$  y  $AD=4$ , calcule
- ❖ AE.

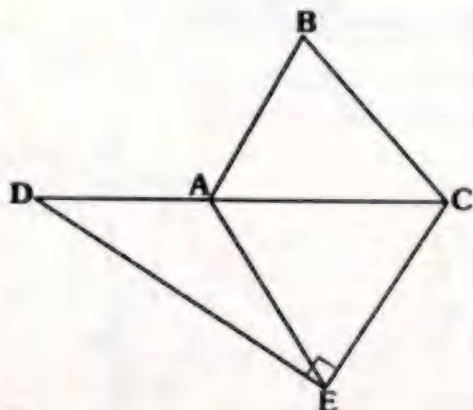
A)  $3\sqrt{2}$

B)  $2\sqrt{3}$

C) 5

D) 7

E)  $2\sqrt{5}$



**PROBLEMA N° 153**

Calcule CD, si  $AB=a$  y  $BD=b$ .

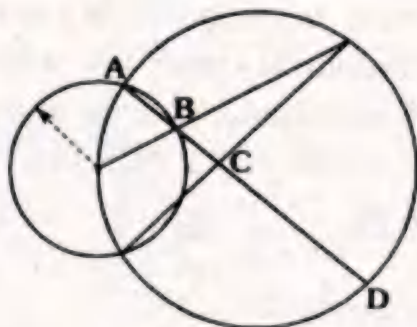
A)  $\frac{b^2}{a+b}$

B)  $\frac{a^2}{a+b}$

C)  $\frac{ab}{b-a}$

D)  $\frac{2ab}{a+b}$

E)  $\frac{a+b}{2}$



**PROBLEMA N° 154**

Se tiene un cuadrado ABCD de centro "O"; por dicho punto se traza una recta que interseca a la prolongación de  $\overline{CB}$  en "P" tal que  $7(PB)=2(BC)$ ; luego se traza  $\overline{AH} \perp \overline{PO}$  ( $H \in \overline{PO}$ ). Calcule AH, si  $HO=4$ .

A) 8

B) 24

C) 4

D) 18

E)  $9\sqrt{2}$

**PROBLEMA N° 155**

Se tiene un triángulo ABC de incentro I, una recta que contiene al punto I interseca a  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  en M y N respectivamente, tal

que  $BM=BN$ ,  $AM=4$  y  $NC=9$ . Calcule MN.

A) 13

B) 6

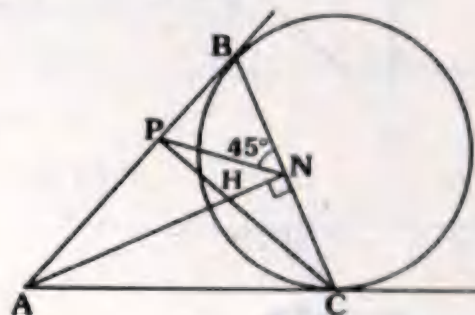
C) 15

D) 12

E) 10

**PROBLEMA N° 156**

Si  $AP=3(PB)$  y  $BC=14$ , calcule HN. (B y C son puntos de tangencia).



A) 3

B) 4

C) 3,5

D) 7

E) 5

**PROBLEMA N° 157**

En un triángulo ABC de incentro I y excentro E relativo al  $\overline{BC}$ , se cumple que  $AB+AC=3(BC)$  y el  $\overline{AE}$  interseca al  $\overline{BC}$  en M. Calcule ME, si  $MI=1$ .

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 6.

**PROBLEMA N° 158**

En la prolongación del lado AC y en el lado AB de un triángulo ABC se ubican respectivamente Q y P, tal que  $\overline{PQ} \cap \overline{BC} = \{R\}$ , calcule CQ, si:  $AP=3(PB)$ ,  $2(PR)=3(RQ)$  y  $AQ=28$ .

A) 2

B) 1

C) 3

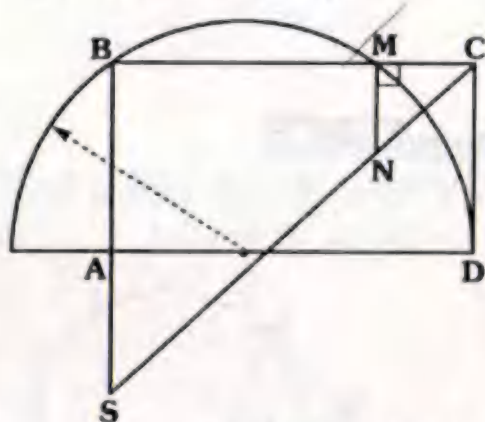
D) 4

E) 7



**PROBLEMA N° 159**

En la figura ABCD es un rectángulo,  $AD=2(CD)$  y  $NC=2$ . Calcular SN.



- A) 4                      B) 6                      C) 8  
D) 12                     E) 15

**PROBLEMA N° 160**

Se tiene un triángulo  $ABC$  ( $m\angle B = 90^\circ$ ). Una semicircunferencia tiene su centro en el  $\overline{AC}$ , pasa por  $A$  y es tangente al  $\overline{BC}$  en  $Q$ . En la prolongación de  $\overline{AQ}$  se ubica  $P$ , de modo que  $m\angle APB + m\angle BPC = 180^\circ$ ,  $PC = 7(PQ)$  y  $AB = 2$ . Calcule  $AC$ .

- A) 4                      B) 6                      C) 8  
D) 12                     E) 14

**PROBLEMA N° 161**

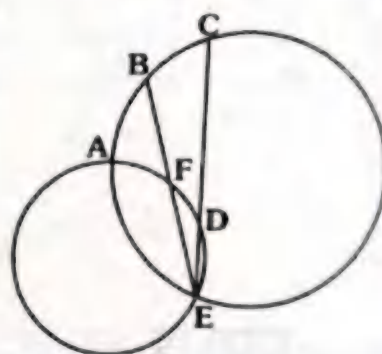
El diámetro  $\overline{AB}$  de una semicircunferencia se prolonga hasta el punto C y luego se traza la tangente  $\overline{CT}$ . En la circunferencia se traza la cuerda  $\overline{BP}$  paralela a la tangente  $\overline{CT}$ , tal que  $AP=2$ . Si  $BC=6$ . Calcule la medida del radio de la semicircunferencia.

- A) 2                      B) 3                      C) 4  
D) 5                      E) 6

**PROBLEMA N° 162**

Según el diagrama  $AC=8$ ,  $BF=3$  y  $CD=4$ , calcule  $AB$ .

- ❖ A) 3
- ❖ B) 4
- ❖ C) 5
- ❖ D) 6
- ❖ E) 7

**PROBLEMA N° 163**

- ❖ Se tiene un triángulo ABC; la circunferencia inscrita de centro I es tangente a BC en P se traza la bisectriz interior AQ. Si
- ❖ AB=13; BC=14 y AC=15, calcule PQ.

- ❖ A) 0,25      B) 0,5      C) 0,75  
❖ D) 1      E) 1,25

**PROBLEMA N° 164**

❖ Interiormente a un triángulo ABC se traza  
❖ la semicircunferencia de diámetro BC, la  
❖ cual corta a la altura AH de dicho triángu-  
❖ lo en P. La mediana BM corta al  $\overline{AH}$  en  
❖ Q. Calcule QH, si:  $AQ=15$  y  $m\widehat{PB}=53^\circ$ .

- ❖ A) 1                  B) 2                  C) 3  
❖ D) 4                  E) 5

**PROBLEMA N° 165**

- ❖ En un triángulo ABC de baricentro "G" se
- ❖ traza una recta por G que intersecta a  $\overline{BC}$
- ❖ y  $\overline{BA}$  en K y L y a la prolongación de  $\overline{CA}$

- ❖ en P. Si:  $\frac{1}{GL} + \frac{1}{GP} = 0,25$ ; calcule GK.

- A) 1                      B) 2                      C) 3  
D) 4                      E) 0,5

**PROBLEMA N° 166**

En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior  $\overline{BR}$  (R en  $\overline{AC}$ ) luego se traza la ceviana  $\overline{AM}$  que interseca a  $\overline{BR}$  en su punto medio. Si  $BM=2$  y  $CM=5$ , calcule AB.

- A)  $\frac{20}{7}$                       B)  $\frac{10}{7}$                       C) 4  
D) 3                      E)  $\frac{14}{3}$

**PROBLEMA N° 167**

En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores  $\overline{BE}$ ,  $\overline{CD}$  y  $\overline{AF}$  (E en  $\overline{AC}$ ; D en  $\overline{AB}$ ; F en  $\overline{BC}$ ). Las mediatrices de  $\overline{CD}$ ,  $\overline{BE}$  y  $\overline{AF}$  intersectan a las prolongaciones de  $\overline{BA}$ ,  $\overline{CA}$  y  $\overline{BC}$  en los puntos H, G y F respectivamente. Si  $GH=a$  y  $HF=b$ , calcule GF.

- A)  $\sqrt{a^2+b^2}$                       B)  $2\sqrt{a^2+b^2}$   
C)  $a+b$                       D)  $\sqrt{a^2+b^2+2ab}$   
E)  $\sqrt{a^2+b^2-2ab}$

**PROBLEMA N° 168**

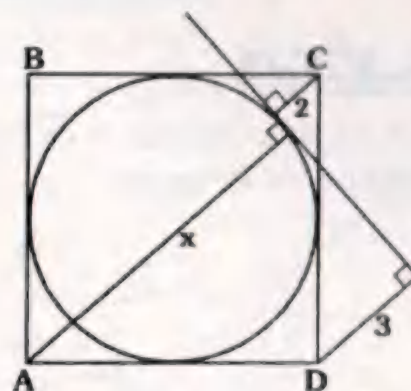
Se tiene un cuadrilátero inscrito ABCD, de manera que las prolongaciones de  $\overline{AD}$  y  $\overline{BC}$  se cortan en "F" y las prolongaciones de  $\overline{DC}$  y  $\overline{AB}$  en "E", la bisectriz del ángulo

lo BFA intersecta a  $\overline{AB}$  en "I" la bisectriz del ángulo DEA intersecta a  $\overline{AD}$  en "H", si  $m\angle CAD = 20^\circ$ , calcule la medida del ángulo determinado por  $\overline{BC}$  y  $\overline{HI}$ .

- A)  $10^\circ$                       B)  $15^\circ$                       C)  $20^\circ$   
D)  $25^\circ$                       E)  $30^\circ$

**PROBLEMA N° 169**

En la figura, ABCD es un cuadrado. Calcule x.

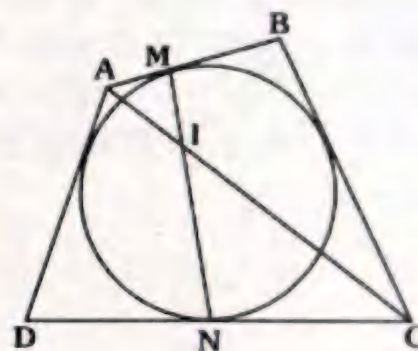


- A) 14                      B) 10                      C) 16  
D) 15                      E) 11

**PROBLEMA N° 170**

En la figura, M y N: puntos de tangencia,  $AM=4$ ;  $IC=10$ ;  $NC=8$ . Calcule AI.

- A) 4  
B) 5  
C) 3  
D) 7  
E) 8

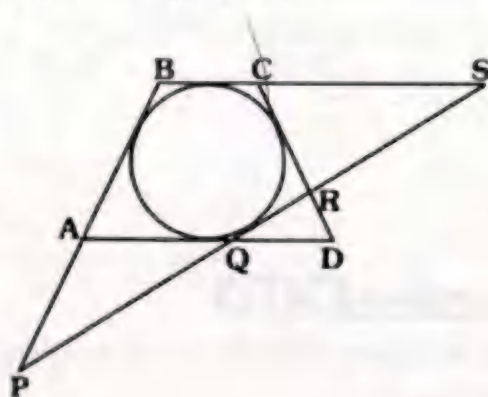




**PROBLEMA N° 171**

En la figura, ABCD es un trapecio isósceles,  $PQ=2$  y  $QR=1$ . Calcule RS.

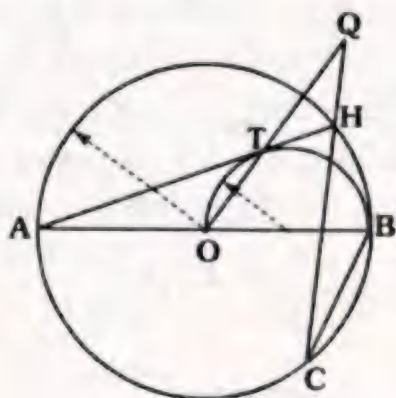
- A) 2
- B) 1
- C) 3
- D) 3,5
- E) 4



**PROBLEMA N° 172**

Del gráfico, calcule  $CH/HQ$ , si  $OQ \parallel BC$ , T y B son puntos de tangencia.

- A) 3/2
- B) 2
- C) 4/3
- D) 5/4
- E) 7/3



**PROBLEMA N° 173**

En un cuadrado ABCD, en  $\overline{AB}$  y  $\overline{AD}$  se ubican los puntos P y Q respectivamente tal que la  $m\angle PCQ = 45^\circ$ ,  $\overline{CQ} \cap \overline{BD} = \{M\}$ ,  $\overline{PM} \cap \overline{CA} = \{N\}$  y  $(CM)^2 = 10(CN)$ . Calcule AB.

- A) 5
- B)  $5\sqrt{2}$
- C)  $8\sqrt{2}$
- D) 10
- E)  $10\sqrt{2}$

**PROBLEMA N° 174**

En un triángulo ABC inscrito en una circunferencia, en el arco AB se ubica el punto P, las prolongaciones de  $\overline{BP}$  y  $\overline{CA}$  se intersectan en Q. Si  $AB=BC$ ,  $BP=4$  y  $PQ=12$ , calcule BC.

- A) 10
- B) 8
- C)  $4\sqrt{2}$
- D) 6
- E) 9

**PROBLEMA N° 175**

Se tiene un triángulo ABC:  $m\angle ACB = 75^\circ$ , se traza la altura  $\overline{BH}$  y  $\overline{HP}$  perpendicular a  $\overline{BC}$  ( $P \in \overline{BC}$ ), luego se traza  $\overline{PQ}$  perpendicular a  $\overline{AB}$  ( $Q \in \overline{BA}$ ). si  $\overline{PQ} \cap \overline{BH} = \{L\}$  y  $PL=6$ , calcule AB.

- A) 36
- B) 18
- C) 20
- D) 24
- E) 28

**PROBLEMA N° 176**

Se tiene un hexágono regular ABCDEF, en la prolongación de  $\overline{BC}$  se ubica el punto R de modo que  $\overline{AR}$  interseca a  $\overline{FC}$  y  $\overline{CD}$  en N y M respectivamente. Si  $AN=3$  y  $NM=1$ , calcule MR.

- A) 4
- B) 3
- C) 2,5
- D) 2
- E) 6

**PROBLEMA N° 177**

En un triángulo ABC, en  $\overline{BC}$  y en su interior se ubican los puntos Q y P respectivamente, de modo que APQC es un trapecio isósceles,  $m\angle BCA = 60^\circ$  y  $m\angle ABP = m\angle PBQ$ . Si  $AB=3(QC)$  y  $BQ=6$ , calcule PQ.

- A) 1
- B) 1,5
- C) 2
- D) 2,5
- E) 3

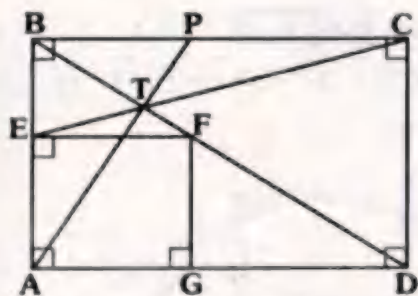
**PROBLEMA N° 178**

En el triángulo ABC se ubica en  $\overline{AC}$  el punto D y se traza  $\overline{DH} \parallel \overline{AB}$  (H en  $\overline{BC}$ ) tal que  $m\angle BDC = m\angle BHD$ . Si  $AB=12$ ,  $BH=4$  y  $DC=10$ , calcule BD.

- A)  $4\sqrt{2}$       B)  $3\sqrt{6}$       C) 9  
D) 6      E)  $6\sqrt{2}$

**PROBLEMA N° 179**

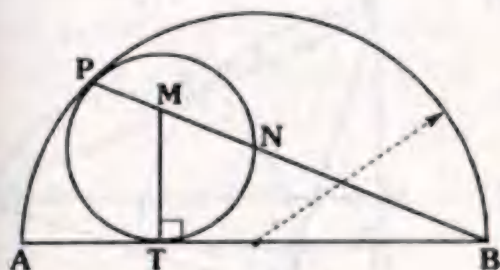
Según el gráfico  $5(BP)=3(PC)$ , si  $GD=15$ , calcule AG.



- A) 6      B) 18      C) 7,5  
D) 12      E) 9

**PROBLEMA N° 180**

Del gráfico,  $\overline{AB}$  es diámetro, P y T son puntos de tangencia. Calcule MN, si  $NB=6$  y  $m\widehat{NP} = 120^\circ$ .



- A)  $3\sqrt{2}$       B)  $2\sqrt{3}$       C) 4  
D) 3      E) 2

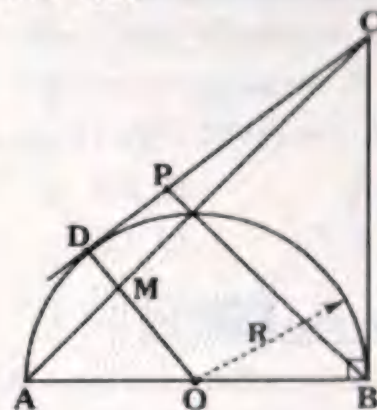
**PROBLEMA N° 181**

Sobre los lados AB y BC de un triángulo ABC, se toman respectivamente los puntos P y Q y R, S y H en  $\overline{AC}$  de modo que PQRS es un cuadrado. La prolongación del  $\overline{AQ}$  corta a la paralela trazada por B al  $\overline{AC}$  en M. Calcule la  $m\angle AMH$ , si  $PS=3(AS)$  y  $\overline{BH} \perp \overline{AC}$ .

- A)  $8^\circ$       B)  $15^\circ$       C)  $23^\circ$   
D)  $18,5^\circ$       E)  $30^\circ$

**PROBLEMA N° 182**

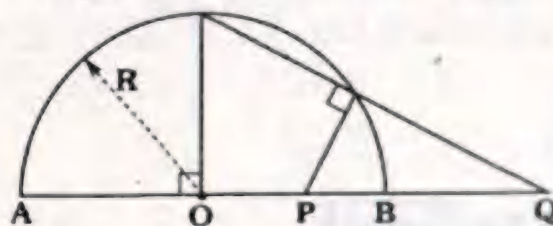
Calcule R, si D es punto de tangencia,  $BP=3(AM)$  y  $BC=18$ .



- A) 6  
B) 12  
C) 8  
D) 4  
E)  $3\sqrt{2}$

**PROBLEMA N° 183**

En la figura,  $OP=BQ=x$ , calcule x.



- A)  $\frac{R}{2}$       B)  $\frac{R}{2}\sqrt{3}$   
C)  $\frac{R}{2}(\sqrt{3}-1)$       D)  $\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$   
E)  $\frac{R}{2}(\sqrt{7}-1)$

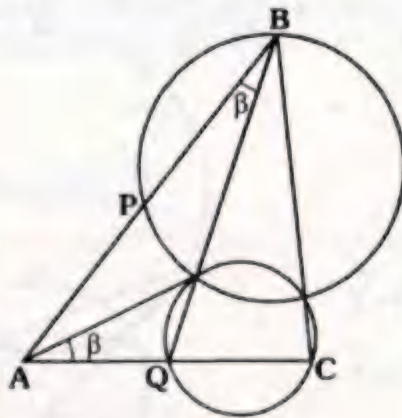




**PROBLEMA N° 191**

Si  $AQ=5$  y  $AP=6$ , calcule  $m\widehat{PB}$ .

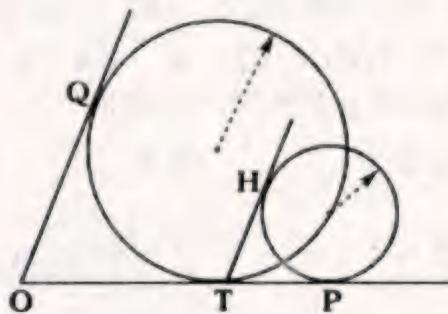
- A)  $127^\circ$
- B)  $135^\circ$
- C)  $106^\circ$
- D)  $90^\circ$
- E)  $120^\circ$



**PROBLEMA N° 192**

Calcule  $OP$ , si  $\overline{OQ} \parallel \overline{TH}$ , los radios miden 2 y 3, además  $Q, H, T$  y  $P$  son puntos de tangencia.

- A)  $\sqrt{2}$
- B)  $\sqrt{6}$
- C)  $5\sqrt{2}$
- D) 5
- E) 4



**PROBLEMA N° 193**

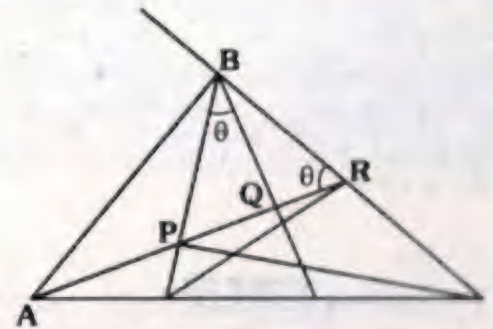
Se tiene el cuadrado  $ABCD$ , se ubica  $E$  en  $\overline{BC}$  y  $F$  en la prolongación de  $\overline{AD}$  tal que  $\overline{EF}$  es tangente a la circunferencia inscrita. Si  $EC=2$  y  $DF=3$ . Calcule  $AB$ .

- A) 4
- B) 6
- C) 8
- D) 12
- E) 18

**PROBLEMA N° 194**

En el gráfico,  $AP=2$  y  $RQ=3$ , calcule  $\frac{QB}{BR}$ .

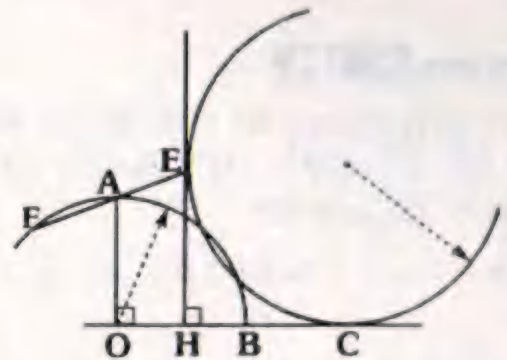
- ❖ A) 1
- ❖ B)  $1/2$
- ❖ C)  $1/3$
- ❖ D)  $2/3$
- ❖ E)  $4/3$



**PROBLEMA N° 195**

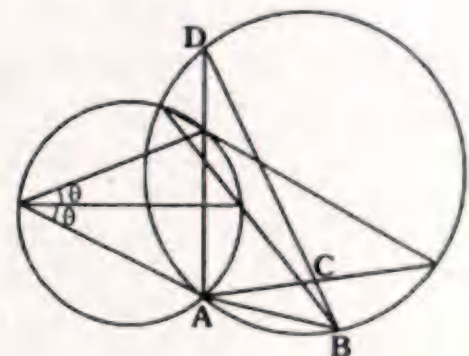
En el gráfico,  $C$  y  $E$  son puntos de tangencia. Además  $m\widehat{AF} = 45^\circ$ ,  $OH = 2\sqrt{2}$  y  $HB = 3\sqrt{2}$ . Calcule  $BC$ .

- ❖ A) 1
- ❖ B) 2
- ❖ C) 4
- ❖ D)  $2\sqrt{2}$
- ❖ E) 8



**PROBLEMA N° 196**

Si  $BC=a$  y  $CD=b$ . Calcule  $AB$ .





- A)  $\sqrt{ab}$                       B)  $\sqrt{a(a+b)}$   
 C)  $\sqrt{b(a+b)}$                 D)  $\sqrt{2ab}$   
 E)  $2\sqrt{ab}$

**PROBLEMA N° 197**

En la semicircunferencia de diámetro  $\overline{AD}$  se inscribe el cuadrilátero ABCD tal que  $BC=CD=2$  y  $AD=8$ . Calcule AB.

- A) 6                      B) 7                      C) 8  
 D) 4                      E) 5

**PROBLEMA N° 198**

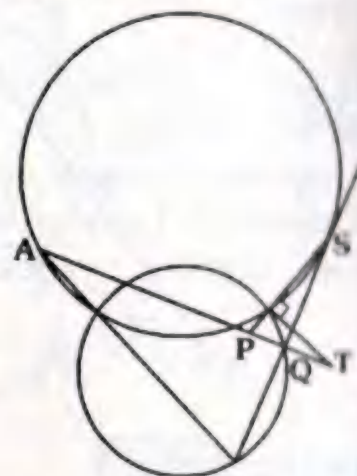
En el hexágono regular ABCDEF se ubica M en  $\overline{CE}$ ,  $\overline{CF} \cap \overline{AM} = \{Q\}$ ,  $2(AQ)=3(QM)$  y  $CM=6$ . Calcule EM.

- A) 2,5                      B) 2,8  
 C) 3                        D) 3,2  
 E) 3,6

**PROBLEMA N° 199**

En el gráfico, S es punto de tangencia,  $PQ=3$  y  $QT=5$ . Calcule AP.

- A) 8  
 B) 4  
 C) 12  
 D)  $4\sqrt{2}$   
 E)  $4\sqrt{3}$



**PROBLEMA N° 200**

En el triángulo ABC, con  $AB < BC$ , se traza la bisectriz interior BD y la mediana BM, I es incentro del triángulo ABC,  $\overleftrightarrow{AI} \cap \overline{BM} = \{E\}$  y  $\overline{EM} \cap \overline{IC} = \{F\}$ . Si  $BE=6$  y  $FM=4$ . Calcule EF.

- A) 2                      B) 3                      C) 1  
 D)  $\sqrt{2}$                       E)  $\sqrt{3}$





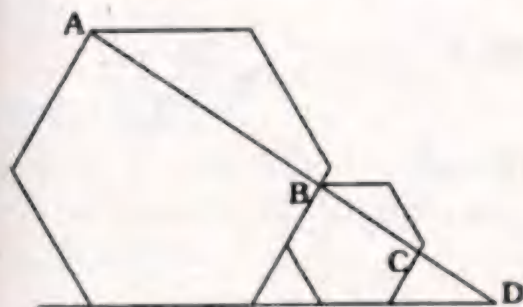
# Problemas Propuestos

Ciclo

Semestral  
Intensivo

## PROBLEMA N° 201

En el gráfico, se tienen dos hexágonos regulares, si  $AB=a$  y  $BC=b$ . Calcule  $CD$ .



- A)  $\frac{ab}{a+b}$     B)  $\frac{ab}{a-b}$     C)  $\frac{2ab}{a-b}$   
D)  $\frac{a-b}{2}$     E)  $\frac{b^2}{a-b}$

## PROBLEMA N° 202

En un triángulo  $ABC$  se ubica en la región interior  $P$  y los puntos  $M$ ,  $N$  y  $Q$  en  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  respectivamente, tal que  $\overline{MP} \parallel \overline{AB}$ ,  $\overline{NP} \parallel \overline{BC}$  y  $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$ .

Calcule  $\frac{AM}{AC} + \frac{BN}{AB} + \frac{CQ}{BC}$ .

- A) 1    B) 2    C) 3  
D)  $\frac{1}{2}$     E)  $\frac{1}{3}$

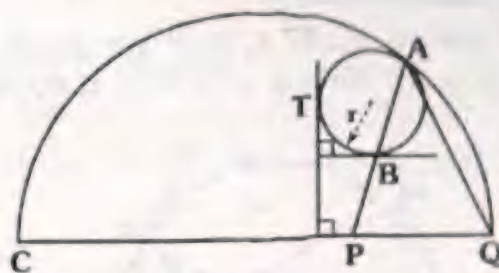
## PROBLEMA N° 203

En un triángulo  $ABC$  se traza la circunferencia inscrita la cual es tangente a los lados  $AB$ ,  $BC$  y  $AC$  en  $P$ ,  $Q$  y  $T$ , luego se

- ❖ traza la perpendicular  $TH$  a  $\overline{PQ}$  ( $H$  en  $\overline{PQ}$ ).
- ❖ Demostrar  $m\angle AHT = m\angle THC$ .

## PROBLEMA N° 204

- ❖ En el gráfico,  $\overline{CQ}$  es diámetro de la semicircunferencia,  $A$ ,  $B$  y  $T$  son puntos de tangencia;  $QA=2(AB)$  y  $PQ=4\sqrt{2}$ . Calcule  $r$ .



- A) 2    B)  $\sqrt{2}$     C)  $2\sqrt{2}$   
D) 4    E)  $\sqrt{2}+2$

## PROBLEMA N° 205

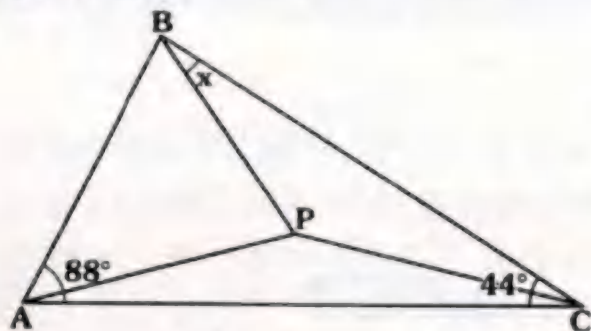
- ❖ Sea  $P$  un punto interior de un semicírculo de diámetro  $AB$  (el ángulo  $APB$  es obtuso). La circunferencia inscrita al triángulo  $ABP$  es tangente a los lados  $AP$  y  $BP$  en los puntos  $M$  y  $N$ , respectivamente. La recta  $MN$  corta a la semicircunferencia en los puntos  $X$  y  $Y$ . Si  $m\widehat{XY} = \alpha$ , calcule  $m\angle APB$ .

- A)  $\alpha$     B)  $2\alpha$   
C)  $90^\circ - \alpha$     D)  $90^\circ + \alpha$   
E)  $180^\circ - \alpha$



**PROBLEMA N° 206**

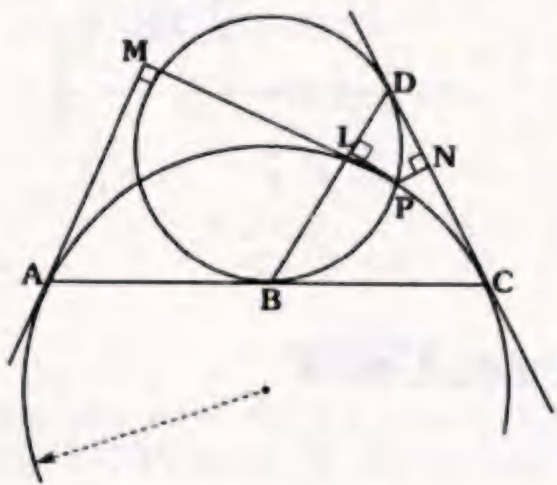
En el gráfico,  $AB=BP$  y  $AP=PC$ .  
Calcule  $x$ .



- A)  $30^\circ$       B)  $16^\circ$       C)  $18^\circ$   
D)  $36^\circ$       E)  $22^\circ$

**PROBLEMA N° 207**

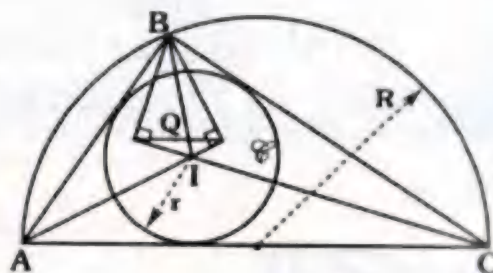
En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia. Si  $MP=a$  y  $NP=b$ . Calcule LP.



- A)  $a+b$       B)  $\sqrt{ab}$   
C)  $2\sqrt{ab}$       D)  $\sqrt[4]{b^3a}$   
E)  $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

**PROBLEMA N° 208**

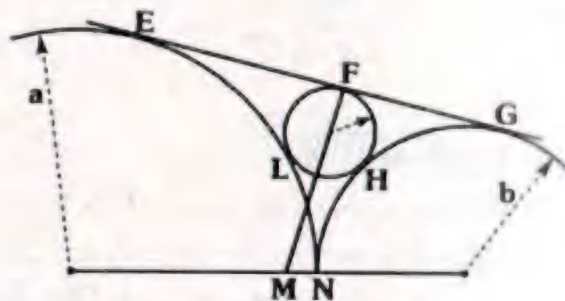
En el gráfico,  $\mathcal{C}$  es la circunferencia inscrita en el triángulo ABC. Calcule  $BQ/QI$ .



- A)  $\frac{2R}{r}$       B)  $\frac{2R+r}{r}$   
C)  $\frac{2R-r}{r}$       D)  $\frac{2R-r\sqrt{2}}{r}$   
E)  $\frac{2R+r\sqrt{2}}{r}$

**PROBLEMA N° 209**

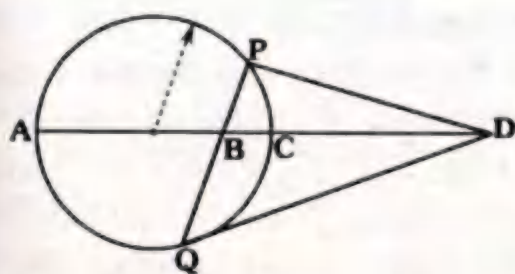
En el gráfico, E, F, G, H y L son puntos de tangencia. Calcule MF.



- A)  $\sqrt{a}-\sqrt{b}$       B)  $\sqrt{ab} \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$   
C)  $\sqrt{ab}$       D)  $2\sqrt{ab}-\sqrt{a}-\sqrt{b}$   
E)  $\sqrt{a^2-b^2}$

**PROBLEMA N° 210**

En el gráfico, A, B, C y D representan una cuaterna armónica. Indique que punto notable es C para el triángulo PQD.



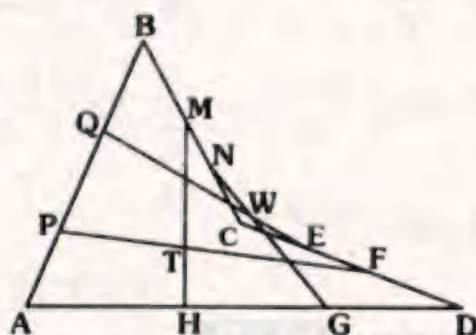
- A) Baricentro      B) Incentro  
C) Circuncentro    D) Ortocentro  
E) Punto simediano

**PROBLEMA N° 211**

En el gráfico, cada lado del cuadrilátero no convexo ABCD es trisecado por los puntos indicados.

Calcule:  $\frac{WN}{WG} + \frac{PT}{TF} + \frac{TH}{MH} + \frac{TF}{TP}$

- A) 1  
B) 2  
C) 10/3  
D) 7/3  
E) 11/3



**PROBLEMA N° 212**

Se tiene el cuadrilátero convexo ABCD, M, L, N y T están sobre  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  y  $\overline{AD}$  respectivamente. Si  $\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC} = 3$ ,  $BL = LC$  y

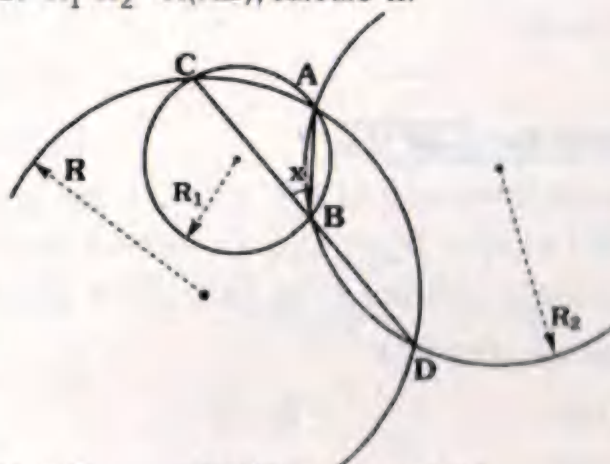
$AT = TD$ .  $\overline{MN} \cap \overline{LT} = \{X\}$ , calcule

$\frac{MX}{XN} + \frac{LX}{XT}$

- A) 2/3      B) 4/3      C) 5/3  
D) 2      E) 3

**PROBLEMA N° 213**

Si  $R_1 \cdot R_2 = R(AB)$ , calcule  $x$ .

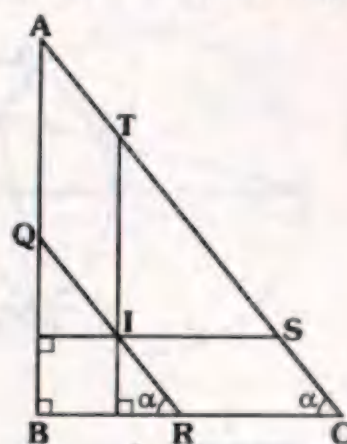


- A) 45°      B) 90°      C) 30°  
D) 75°      E) 60°

**PROBLEMA N° 214**

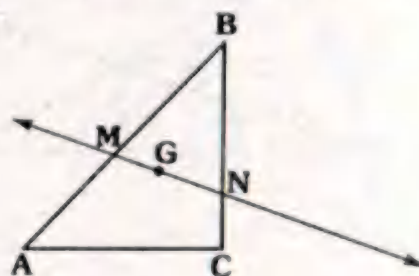
En la figura: I es incentro del triángulo ABC,  $AB=8$  y  $BC=6$ . Calcular  $QR+TS$ .

- A) 8  
B) 9  
C) 10  
D) 11  
E) 12



**PROBLEMA N° 215**

En la figura, G es baricentro del triángulo ABC,  $AM=a$ ,  $MB=b$ ,  $BN=c$  y  $NC=d$ , luego:





- A)  $bc=ac+bd$       B)  $ac=bc+bd$   
 C)  $cd=ac+bd$       D)  $bd=ab+bc$   
 E)  $ac=bd$

**PROBLEMA N° 216**

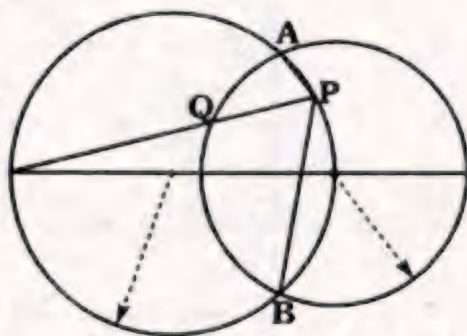
Sea el cuadrado ABCD, P y Q están en  $\overline{AD}$  tal que A, P, Q y D forman una cuaterna armónica. Si  $\overline{QC} \cap \overline{BD} = \{M\}$ . Calcule  $m\angle MPD$

- A)  $30^\circ$       B)  $37^\circ$   
 C)  $53^\circ$       D)  $60^\circ$   
 E)  $45^\circ$

**PROBLEMA N° 217**

En la figura:  $PA=2$  y  $PQ=4$ , calcule PB.

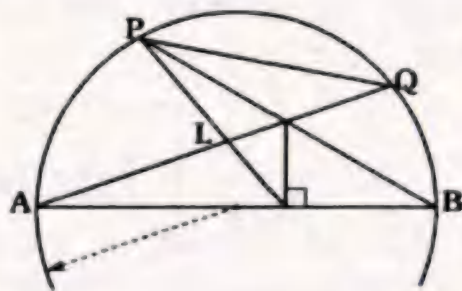
- A) 6  
 B) 8  
 C) 10  
 D) 12  
 E) 16



**PROBLEMA N° 218**

Calcule AL, si:  $2(PQ)=3(PL)$  y  $QL=2$ .

- A)  $2\sqrt{2}$   
 B)  $2\sqrt{3}$   
 C)  $3\sqrt{2}$   
 D)  $3\sqrt{3}$   
 E) 4



**PROBLEMA N° 219**

- En un cuadrilátero ABCD inscrito en una circunferencia;  $\overline{BD}$  biseca en M a  $\overline{AC}$ . Se trazan  $\overline{BH} \perp \overline{AC}$  y  $\overline{CN} \perp \overline{BD}$ ,  $\overline{CN}$  prolongado interseca en L a  $\overline{AD}$ . Si  $(AH)(AL)=48$  y  $LD=10$ , calcule HM.
- A) 1,2      B) 2,4      C) 3,6  
 D) 4,8      E) 0,6

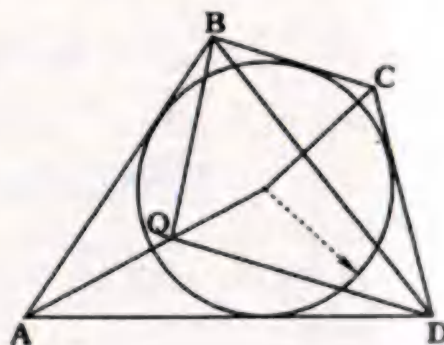
**PROBLEMA N° 220**

- En un triángulo ABC, donde  $AC=78$ ;  $M \in \overline{AB}$ ,  $Q \in \overline{AC}$  y  $R \in \overline{BC} \wedge N \in \overline{BC}$  ( $RN < RC$ ). Si  $AM=324$ ,  $QC=24$ ,  $NC=144$ ,  $MP=9$  y  $PN=4$ , calcule la  $m\angle QRC$ , si  $m\angle A = \alpha$  y  $m\angle C = \theta$  ( $\overline{MN} \cap \overline{QR} = \{P\}$ )

- A)  $\frac{\alpha+\theta}{2}$       B)  $90^\circ - (\alpha+\theta)$   
 C)  $45^\circ - \left(\frac{\alpha+\theta}{4}\right)$       D)  $90^\circ - \left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)$   
 E)  $45^\circ - \left(\frac{\alpha-\theta}{2}\right)$

**PROBLEMA N° 221**

- En el gráfico, el cuadrilátero ABCD es circunscrito.  
 Demostrar que:  
 $m\angle ABC = 2(m\angle QBD) \Leftrightarrow m\angle ADC = 2(m\angle QDB)$



**PROBLEMA N° 222**

En un triángulo ABC:  $AB=14$ ,  $BC=13$  y  $AC=15$ . La circunferencia inscrita determina en dichos lados los puntos M, N y T respectivamente. Si  $\overline{MN} \cap \overline{BT} = \{P\}$ .

Calcule  $MP/PN$ .

- A)  $\frac{56}{47}$       B)  $\frac{52}{49}$       C)  $\frac{43}{39}$   
 D)  $\frac{51}{46}$       E)  $\frac{49}{37}$

**PROBLEMA N° 223**

En un triángulo ABC de circuncentro O y ortocentro H, la mediatriz de  $\overline{AB}$  interseca a  $\overline{BC}$  en M de modo que el producto de la distancia de O hacia  $\overline{AC}$  con  $\overline{OM}$  es 24 y  $HA=4$ , calcule el circunradio del triángulo ABC.

- A) 6      B) 4      C) 24  
 D) 12      E) 10

**PROBLEMA N° 224**

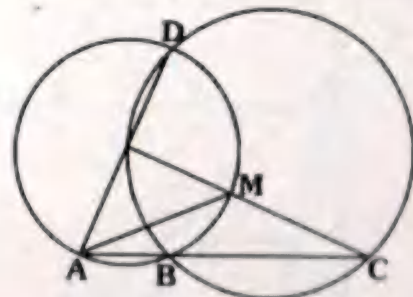
Las circunferencias  $C_1$  y  $C_2$  son tangentes interiores a la circunferencia  $C_3$  en A y B respectivamente en  $C_3$  se traza la cuerda  $\overline{DE}$  (E próximo a B) tangente común interior a  $C_2$  y  $C_1$  en G y F respectivamente y  $\overline{BG} \cap C_3 = \{T\}$ . Si  $5(AB) = 7(FE)$ , calcule la razón de distancias de T a  $\overline{FE}$  y  $\overline{AB}$ .

- A)  $\frac{7}{15}$       B)  $\frac{7}{10}$       C)  $\frac{5}{7}$   
 D)  $\frac{7}{5}$       E) 7

**PROBLEMA N° 225**

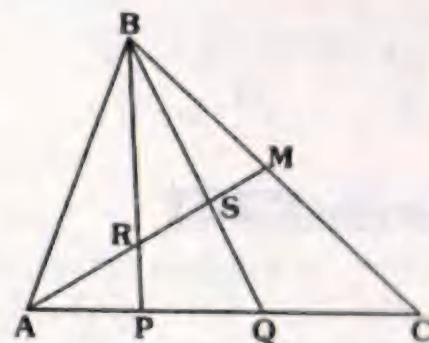
Según el gráfico; calcule AM, si:  $AB=2$  y  $BC=6$ .

- A) 2  
 B) 4  
 C) 6  
 D) 8  
 E) 12

**PROBLEMA N° 226**

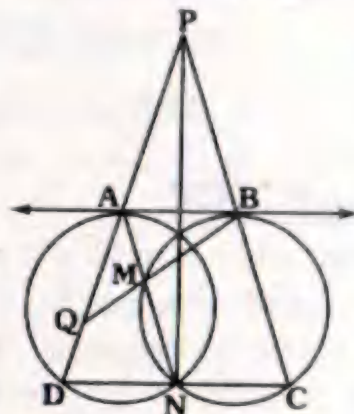
Si:  $AP=PQ=QC$ ; M es punto medio de  $\overline{BC}$  y  $AM=10$ , calcule RS.

- A)  $\sqrt{3}$   
 B) 3  
 C)  $2\sqrt{3}$   
 D)  $3\sqrt{2}$   
 E) 4

**PROBLEMA N° 227**

En el gráfico A y B son puntos de tangencia. Si  $\frac{AM}{MN} = K$ , calcule  $\frac{PA}{AQ}$ .

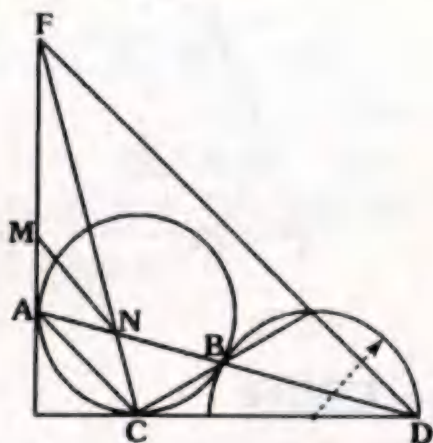
- A) K  
 B)  $K^2$   
 C)  $K^{-1}$   
 D)  $K^{-1/2}$   
 E)  $K^{-2}$





**PROBLEMA N° 228**

Del gráfico, A, B y C son puntos de tangencia. Calcule MN en función de a y b, si  $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ ,  $CA=a$  y  $FD=b$ .



- A)  $\frac{a(a+b)}{(a-b)}$     B)  $\frac{ab}{a+b}$     C)  $\frac{a+b}{2}$   
 D)  $\frac{a^2}{b}$     E)  $\frac{b^2+a^2}{(a+b)}$

**PROBLEMA N° 229**

Se tiene un triángulo rectángulo ABC, se traza la altura  $\overline{BH}$ . En el triángulo ABC se traza la mediana  $\overline{AM}$  que intersecta a  $\overline{BH}$  en P. En el triángulo AHB se traza la mediana  $\overline{AN}$  cuya prolongación intersecta a  $\overline{BC}$  en Q. Calcule el ángulo formado por  $\overline{PQ}$  y  $\overline{MN}$ ,  $m\angle C = 36^\circ$ .

- A)  $54^\circ$     B)  $72^\circ$     C)  $108^\circ$   
 D)  $48^\circ$     E)  $52^\circ$

**PROBLEMA N° 230**

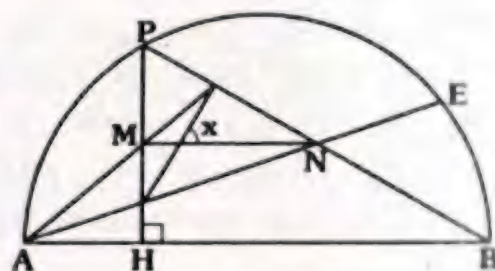
Se tiene un punto exterior A a una circunferencia trazándose las tangentes  $\overline{AC}$  y  $\overline{AB}$  (C y B: puntos de tangencia), luego también por A se traza una secante a la cir-

cunferencia cortando intersectándola primero en M y luego en N (M en  $\overline{AN}$ ). Si  $NC=8$  y  $NB=6$ , además la distancia de A a  $\overline{BM}$  es igual a 3. Calcule la distancia de A a  $\overline{CM}$ .

- A) 3    B) 4    C) 5  
 D) 6    E) 7

**PROBLEMA N° 231**

En la figura  $\overline{AB}$  es diámetro,  $PM=MH$ ,  $PN=NB$ . Si  $m\angle PEB = \theta$ , calcule x.



- A)  $\theta$     B)  $\theta/2$   
 C)  $\frac{3}{2\theta}$     D)  $90^\circ - \frac{\theta}{2}$   
 E)  $45^\circ - \frac{\theta}{4}$

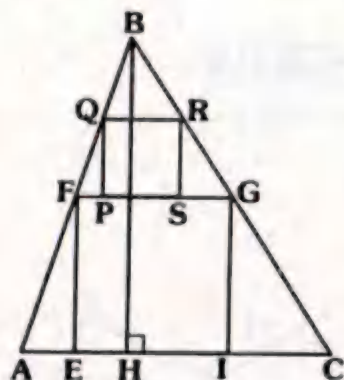
**PROBLEMA N° 232**

Se tienen los triángulos inscritos  $AB_1C$  y  $AB_2C$  en una misma circunferencia, la recta que une los ortocentros de estos triángulos corta a  $\overline{AB_1}$  en M y  $\overline{AB_2}$  en Q. Si  $B_1M = 3(MA)$  y  $MQ=1$ . Calcule la distancia entre los ortocentros.

- A) 1    B) 4    C) 2  
 D) 2,5    E) 3

**PROBLEMA N° 233**

Si EFGI y PQRS son cuadrados y  $AC=b$  y  $BH=a$ . Calcule PS.



- A)  $\frac{ab}{(2a+b)}$       B)  $\frac{ab^2}{(2a-b)}$       C)  $\frac{2ab}{(b-a)}$   
 D)  $\frac{a^2b}{(a-b)^2}$       E)  $\frac{a^2b}{(a+b)^2}$

**PROBLEMA N° 234**

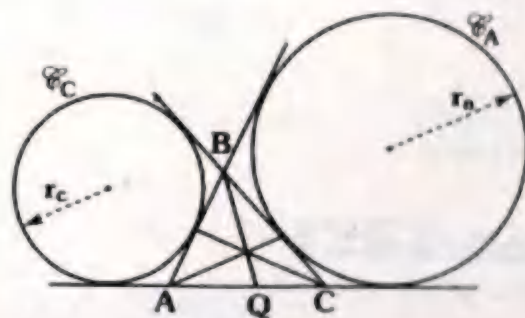
Se tiene un cuadrilátero ABCD circunscrito a una circunferencia; P, Q, S y T son puntos de tangencia de la circunferencia con los lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$  y  $\overline{AD}$  respectivamente  $\overline{PS} \cap \overline{TQ} = \{M\}$  y  $\overline{BD} \cap \overline{AC} = \{N\}$ . Calcule MN, si el perímetro del cuadrilátero ABCD es igual a  $2p$ .

- A)  $\frac{p}{4}$       B)  $\frac{p}{2}$       C)  $p$   
 D)  $\frac{3p}{4}$       E)  $0$

**PROBLEMA N° 235**

En el gráfico,  $\odot_A$  y  $\odot_C$  son las circunferencias exinscritas del triángulo ABC.

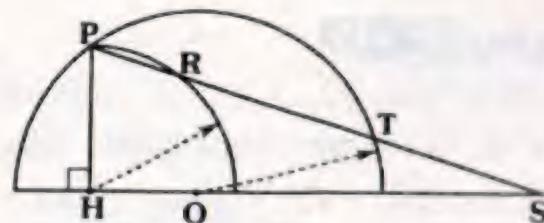
Calcule  $AQ/QC$ .



- A)  $\frac{r_c}{r_a}$       B)  $\frac{r_a}{r_c}$   
 C)  $\frac{r_a + r_c}{r_a}$       D)  $\frac{r_a + r_c}{r_c}$   
 E)  $\frac{r_a}{r_a + r_c}$

**PROBLEMA N° 236**

En el gráfico,  $PR=RT$ ,  $(HS)(OH)=36$ . Calcule HP.



- A)  $3\sqrt{2}$       B)  $6$       C)  $6\sqrt{2}$   
 D)  $4\sqrt{2}$       E)  $9$

**PROBLEMA N° 237**

Se tiene el triángulo ABC, J es un punto interior, P está en  $\overline{AB}$ , Q en  $\overline{BC}$  y R en  $\overline{AC}$ , tal que  $\overline{PJ} \parallel \overline{AC}$ ,  $\overline{JQ} \parallel \overline{AB}$ ,  $\overline{JR} \parallel \overline{BC}$  y  $JP=JQ=JR$ . Si  $AP=a$ ,  $BQ=b$  y  $CR=c$ . Halle JP.

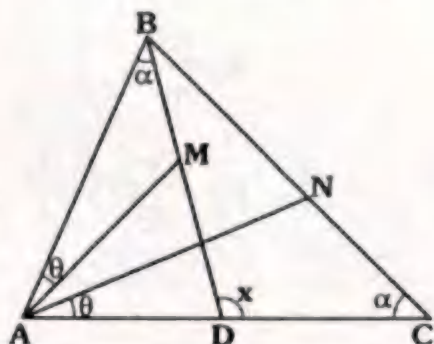
- A)  $\sqrt[3]{abc}$       B)  $\frac{a+b+c}{3}$



- C)  $\sqrt{a^2+b^2+c}$       D)  $\sqrt{ab+bc+ac}$   
 E)  $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$

**PROBLEMA N° 238**

Si  $BM=MD$  y  $BN=NC$ . Calcule  $x$ .



- A)  $\alpha + \theta$       B)  $2(\alpha + \theta)$   
 C)  $180^\circ - (\alpha + \theta)$       D)  $90^\circ - (\alpha + \theta)$   
 E)  $90^\circ$

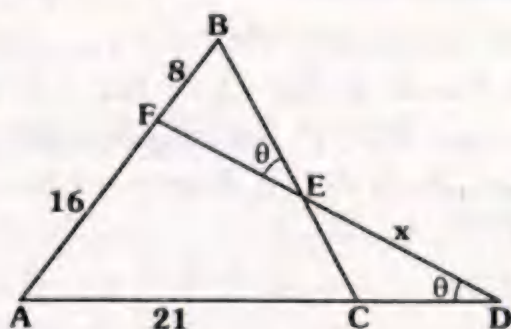
**PROBLEMA N° 239**

Se tiene el triángulo ABC, su punto de Fermat M y N son puntos medios de  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$ . Si  $m\angle BAC = 60^\circ$ . Calcule  $m\angle MFN$ .

- A)  $120^\circ$       B)  $60^\circ$       C)  $90^\circ$   
 D)  $75^\circ$       E)  $105^\circ$

**PROBLEMA N° 240**

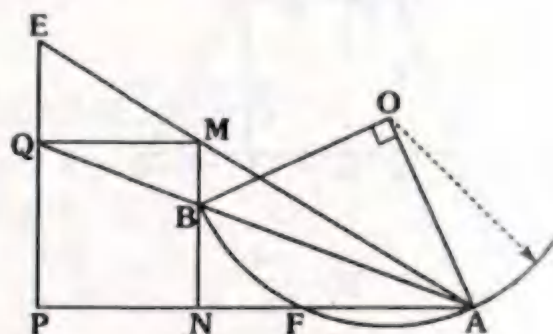
En el gráfico, calcule  $x$ .



- ❖ A)  $\sqrt{65}$       B)  $5\sqrt{7}$       C)  $\sqrt{35}$   
 ❖ D)  $\sqrt{55}$       E)  $7\sqrt{35}$

**PROBLEMA N° 241**

❖ En el gráfico, MNPQ es un cuadrado. Si  $2(AF) = 3(FN)$ . Calcule  $EQ/PQ$ .



- ❖ A)  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$       B)  $\frac{2}{3}$       C)  $\frac{1}{3}$   
 ❖ D)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       E)  $\frac{\sqrt{2}}{3}$

**PROBLEMA N° 242**

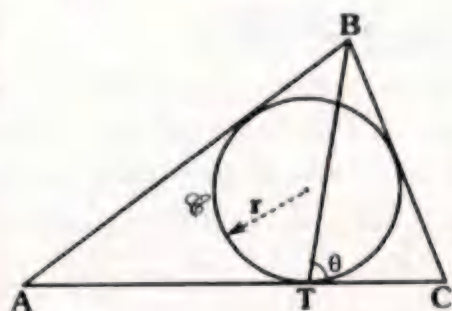
❖ Se tiene el triángulo ABC, P está en  $\overline{AB}$ , Q en  $\overline{BC}$  y R en  $\overline{AC}$  respectivamente. a, b y c son los radios de las circunferencias circunscrita a los triángulos APR, PBQ y QCR.

❖ Si  $m\angle ARP = m\angle QPB = m\angle RQC$ , calcule el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo PQR.

- ❖ A)  $\sqrt[3]{2abc}$       B)  $\sqrt{ab+bc+ac}$   
 ❖ C)  $a+b+c$       D)  $\sqrt{a^2+b^2+c}$   
 ❖ E)  $\sqrt[3]{abc}$

**PROBLEMA N° 243**

❖ En el gráfico,  $\mathcal{C}$  es la circunferencia inscrita en el  $\triangle ABC$ , si  $AT=a$ ,  $TC=b$  ( $a>b$ ), calcule  $\text{tg}\theta$  en función de a, b y r.



- A)  $\frac{a+r}{b+r}$     B)  $\frac{2ab}{r(a-b)}$     C)  $\frac{ab}{r(a-b)}$   
 D)  $\frac{4ab}{r(a-b)}$     E)  $\frac{2r(a-b)}{a+b}$

**PROBLEMA N° 244**

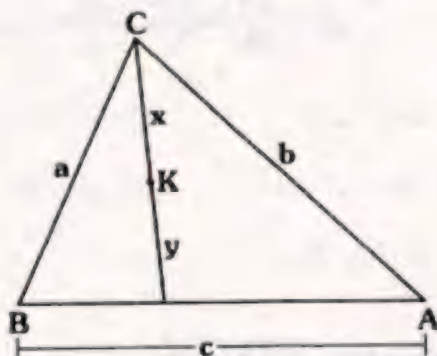
Se tiene el rectángulo ABCD se ubica Q en  $\overline{BC}$  y P en el interior del rectángulo tal que:  $m\angle QAC = m\angle DCP = \theta$  y  $\overline{DP} \perp \overline{AC}$ . Calcule  $m\angle QHD$ , si  $H \in \overline{AD}$  y  $\overline{PH} \parallel \overline{AC}$

- A)  $90^\circ - \theta$     E)  $45^\circ - \theta$     C)  $45^\circ$   
 D)  $60^\circ$     E)  $90^\circ$

**PROBLEMA N° 245**

En el gráfico, K es el punto simediano del  $\triangle ABC$ , demuestre:

$$\frac{x}{y} = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$$



**PROBLEMA N° 246**

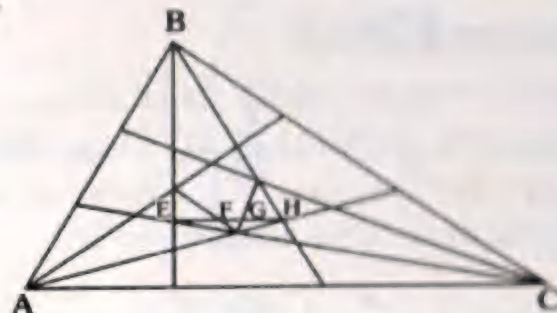
Sea el triángulo ABC, con  $AB=c$ ,  $BC=a$  y  $AC=b$ . Si  $a^2 - c^2 - bc = 0$ .

Calcule  $\frac{m\angle BAC}{m\angle ACB}$

- A) 1    B) 2    C)  $\frac{2}{3}$   
 D)  $\frac{3}{2}$     E)  $\frac{1}{2}$

**PROBLEMA N° 247**

En el gráfico, los lados del triángulo ABC son trisecados, indique la relación correcta.



- A)  $EF = 2(FG) = GH$     B)  $\frac{EF}{FG} = 2 \frac{EH}{GH}$   
 C)  $\frac{EF}{1} = \frac{FG}{2} = \frac{GH}{4}$     D)  $\frac{EF}{FG} = \frac{EH}{GH}$   
 E)  $EF = 3(FG) = GH$

**PROBLEMA N° 248**

Dado el triángulo equilátero ABC, se ubica un punto interior que pertenece a la circunferencia de diámetro  $\overline{AC}$  que dista  $4u$  de  $\overline{AB}$  y  $2u$  de  $\overline{BC}$ . ¿Cuánto dista dicho punto de  $\overline{AC}$ ?

- A)  $6u$     B)  $7u$     C)  $8u$   
 D)  $2\sqrt{2}u$     E)  $2\sqrt{3}u$

**PROBLEMA N° 249**

En el triángulo ABC, se traza la altura  $\overline{BR}$  y las cevianas interiores  $\overline{AP}$  y  $\overline{CQ}$  concu-



rrentes en D. Si  $\overline{PR} \cap \overline{CD} = \{M\}$ ,  $\overline{QR} \cap \overline{AD} = \{N\}$ ,  $RM=4u$ ,  $MP=5u$  y  $RN=3u$ . Calcule  $BD/DR$ .

- A)  $\frac{1}{2}$       B)  $\frac{1}{3}$       C)  $\frac{1}{5}$   
D)  $\frac{3}{2}$       E)  $\frac{5}{3}$

**PROBLEMA N° 250**

Dado un triángulo ABC, las bisectrices interiores  $\overline{BM}$  y  $\overline{CN}$  (M en  $\overline{AC}$  y N en  $\overline{AB}$ ). El rayo MN interseca a la circunferencia circunscrita a dicho triángulo en D.

Si  $\frac{x}{BD} = \frac{y}{AD} + \frac{z}{CD}$ , halle  $\frac{x}{y+z}$ .

- A) 2      B) 1/2      C) 1  
D) 3      E) 1/3

**PROBLEMA N° 251**

Se tiene el paralelogramo ABCD ( $AB > BC$ ), se ubica G en el lado AB, se traza la circunferencia que pasa por A y G la cual es tangente a la prolongación de  $\overline{CB}$  en P. La prolongación de DG corta a dicha circunferencia en H, si el cuadrilátero GHBC es inscriptible, demostrar que  $CP=AB$ .

**PROBLEMA N° 252**

Sea el triángulo ABC y las cevianas interiores concurrentes en P, AL, BE y CF, sea  $\overline{FE} \cap \overline{AP} = \{D\}$ , sea K la proyección ortogonal de D sobre  $\overline{BC}$  respectivamente. Probar que  $m\angle DKF = m\angle DKE$ .

**PROBLEMA N° 253**

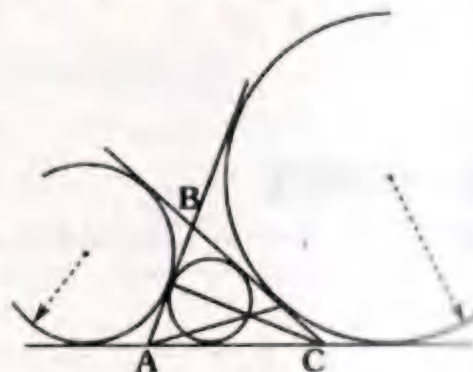
Se tiene un paralelogramo ABCD, se ubica H en la prolongación de AB tal que  $BC=BH$ , en el triángulo BDC se traza la altura CF, luego en la prolongación de FC se ubica P, tal que  $m\angle BHP = 90^\circ$ . Demostrar que el rayo AP es bisectriz del ángulo BAD.

**PROBLEMA N° 254**

Dado un triángulo ABC se trazan exteriormente los rectángulos semejantes ABDE y BCGH (tomar en cuenta el orden de los vértices). Demuestre que la mediatriz de  $\overline{AC}$  corta a  $\overline{EG}$  en el punto medio.

**PROBLEMA N° 255**

En el gráfico,  $AB=c$ ,  $BC=a$  y  $AC=b$ . Indique la relación entre a, b y c.



- A)  $a+b=2c$       B)  $a^2+b^2=2c^2$   
C)  $ab=c^2$       D)  $ab=2c^2$   
E)  $a+b=3c$

**PROBLEMA N° 256**

Calcule la medida de un ángulo del triángulo acutángulo, sabiendo que una bisectriz interior mide  $5u$  y que las alturas trazadas desde los otros vértices miden  $4u$  y  $12u$ .

- A)  $58^\circ$       B)  $74^\circ$       C)  $37^\circ$   
 D)  $60^\circ$       E)  $67^\circ$

**PROBLEMA N° 257**

En un cuadrilátero convexo ABCD las diagonales se cortan en P, de modo que

$$\frac{AB}{2} = \frac{BC}{8} = \frac{CD}{6} = \frac{AD}{3} = \frac{BD}{4}, \text{ si } AP=3.$$

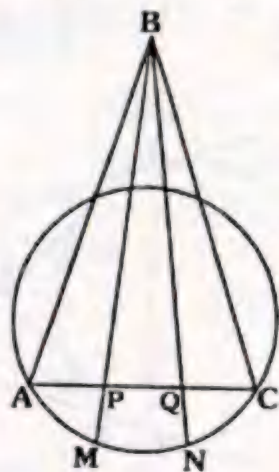
Calcule PC.

- A) 6      B) 7      C) 8  
 D) 10      E) 12

**PROBLEMA N° 258**

En el gráfico,  $AB=BC$ ,  $AP=PQ=QC$  y  $m\widehat{AM}=m\widehat{MN}=m\widehat{NC}=\theta$ . Calcule  $m\angle ABC$ .

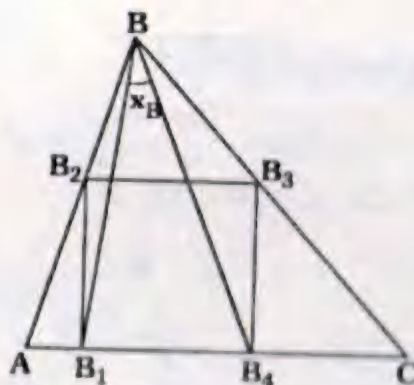
- A)  $90^\circ - \theta$   
 B)  $\theta$   
 C)  $2\theta$   
 D)  $\frac{3\theta}{2}$   
 E)  $\frac{2\theta}{3}$



**PROBLEMA N° 259**

En el gráfico,  $B_1B_2B_3B_4$  es un cuadrado y se define  $x_B (m\angle B_1BB_4)$ , análogamente se define  $x_A$  y  $x_C$ . Calcule  $x_A + x_B + x_C$ .

- A)  $45^\circ$   
 B)  $135^\circ$   
 C)  $90^\circ$   
 D)  $60^\circ$   
 E)  $75^\circ$



**PROBLEMA N° 260**

Se tiene el paralelogramo ABCD,  $AB=3$ ,  $AD=5$  y  $m\angle BAD = 60^\circ$ .  $\mathcal{C}_1$  es una circunferencia tangente a  $\overline{AB}$  y  $\overline{AD}$ ,  $\mathcal{C}_2$  es una circunferencia tangente a  $\overline{BC}$  y  $\overline{CD}$ . Si  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$  son tangentes en T. Halle la longitud del lugar geométrico de T.

- A)  $7\pi$       B)  $\frac{7}{2}\pi$       C)  $5\pi$   
 D) 6      E) 7





# Problemas Propuestos

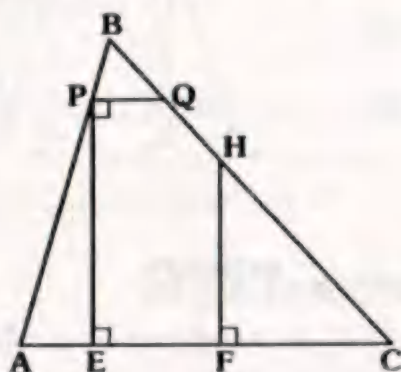
Ciclo

## Repaso

### PROBLEMA N° 261

En el gráfico,  $\frac{CH}{5} = \frac{HQ}{2} = QB$ ,  $AE = 14$  y  $FC = 25$ . Calcule  $EF$ .

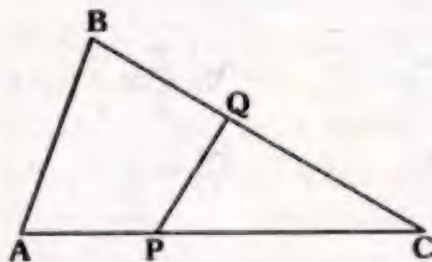
- A) 13
- B) 13,5
- C) 15
- D) 16
- E) 17



### PROBLEMA N° 262

En el gráfico,  $QC = 3(BQ) = 3(AB)$  y  $AP = PQ = 4$ . Calcule  $PC$ .

- A) 8
- B) 10
- C) 12
- D) 15
- E) 16



### PROBLEMA N° 263

En el triángulo ABC, se traza la ceviana interior BD. Tal que  $m\angle ACB = 2(m\angle ABD)$ ,  $AB = 6$ ,  $BD = 5$  y  $AD = 2$ . Calcule el perímetro de la región triangular BCD.

- A) 13
- B) 16
- C) 19
- D) 21
- E) 23

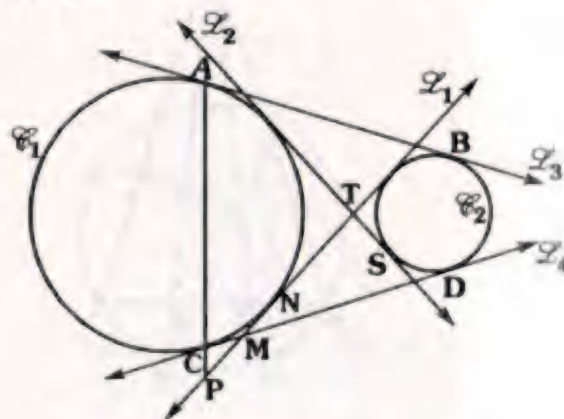
### PROBLEMA N° 264

Se tiene el triángulo ABC (recto en B), P y Q trisecan a  $\overline{AC}$  (Q en  $\overline{PC}$ ). Si G es baricentro del triángulo PBQ, calcule  $m\angle PGQ$ .

- A)  $60^\circ$
- B)  $45^\circ$
- C)  $135^\circ$
- D)  $90^\circ$
- E)  $105^\circ$

### PROBLEMA N° 265

$\vec{L}_1$ ,  $\vec{L}_2$ ,  $\vec{L}_3$  y  $\vec{L}_4$ , son rectas tangentes a  $\mathcal{C}_1$  y  $\mathcal{C}_2$ . Si  $NT = 3(MN) = 3$  y  $TS = 2$ . Calcule  $PM$ .



- A)  $\frac{27}{13}$
- B)  $\frac{14}{13}$
- C)  $\frac{7}{5}$
- D)  $\frac{13}{27}$
- E)  $\frac{24}{7}$

### PROBLEMA N° 266

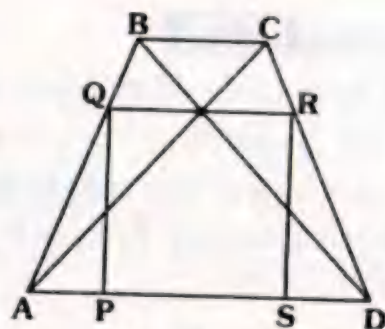
En el triángulo ABC, por su incentro se traza la paralela a  $\overline{BC}$  que corta a  $\overline{AB}$  en M y a  $\overline{AC}$  en N. Si  $AB + AC = 12$  y  $MN = 4$ , calcule  $BC$ .

- A) 6                      B) 7                      C) 8  
D) 9                      E) 10

**PROBLEMA N° 267**

En el gráfico,  $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$  y PQRS es un cuadrado. Si  $BC=a$ , calcule la longitud de la altura del trapecio.

- A)  $a\sqrt{2}$   
B)  $a\sqrt{3}$   
C)  $\frac{3}{2}a$   
D)  $2a$   
E)  $3a$



**RESOLUCIÓN N° 268**

En un trapecio ABCD ( $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ) se ubican en  $\overline{AD}$  y  $\overline{BC}$  los puntos P y Q respectivamente, tal:  $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$  y  $\overline{PB} \parallel \overline{DQ}$ . Calcule PQ, si:  $(AB)(DC)=324$

- A) 9                      B) 18                      C) 27  
D)  $18\sqrt{2}$               E)  $9\sqrt{3}$

**PROBLEMA N° 269**

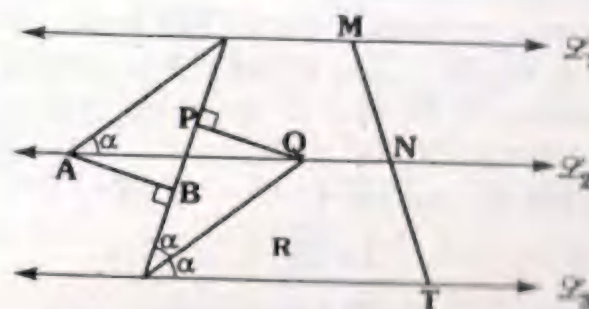
La mediatriz del lado AC de un triángulo ABC interseca a la circunferencia circunscrita en P. Calcule AQ, si  $\overline{AP} \cap \overline{BC} = \{Q\}$ ,  $AB=5(BQ)$  y  $PQ=3$ .

- A) 6                      B) 8                      C) 16  
D) 12                      E) 14

**PROBLEMA N° 270**

En el gráfico,  $\overline{\ell_1} \parallel \overline{\ell_2} \parallel \overline{\ell_3}$   $6(AB)=5(PQ)$  y

$MN=7$ . Calcule NT.



- A) 4,8                      B) 4,2                      C) 2,4  
D) 8,4                      E) 8,6

**PROBLEMA N° 271**

En los lados BC y CD de un rectángulo ABCD, se ubican P y Q respectivamente, tal que:  $PB=2(PC)$  y  $5(QD)=3(CQ)$ . Calcule OH, si  $\overline{AP} \cap \overline{BQ} = \{O\}$ ,  $\overline{OH} \perp \overline{QC}$  y  $AD=85$ .

- A) 35                      B) 45                      C) 40  
D) 55                      E) 65

**PROBLEMA N° 272**

En el triángulo ABC, se traza la mediatriz de  $\overline{AB}$ , que corta a  $\overline{AC}$  en N y a la prolongación de  $\overline{BC}$  en T. Si  $CB=3(TC)$  y  $AN=8$ . Calcule NC

- A) 1,5                      B) 2                      C) 3  
D) 4                      E) 3,5

**PROBLEMA N° 273**

En un triángulo ABC se traza la bisectriz exterior  $\overline{BP}$  (P en la prolongación de  $\overline{AC}$ ). Si las alturas relativas a los lados  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  miden 3 cm y 6 cm respectivamente y  $BP=10$ cm. Calcule  $m\angle PBC$

- A)  $37^\circ$                       B)  $60^\circ$                       C)  $75^\circ$   
D)  $53^\circ$                       E)  $45^\circ$



**PROBLEMA N° 274**

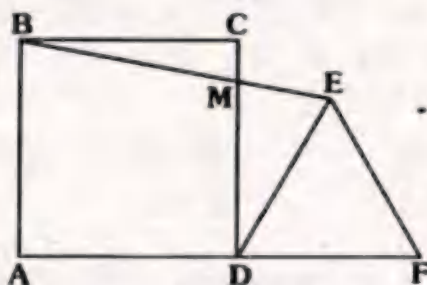
Se tiene un paralelogramo ABCD. En los lados AB, BC, CD y AD se ubican respectivamente F, M, N y E; de modo que los segmentos FN, ME y AC concurren en P. Calcule EF; si  $PM=4$ ,  $PE=6$  y  $MN=8$ .

- A) 9                      B) 10                      C) 8  
D) 12                      E) 14

**PROBLEMA N° 275**

En el gráfico, se muestra al cuadrado ABCD y al triángulo equilátero DEF. Si  $ME=10$  y  $AD=DE$ . Calcule BM.

- A) 25  
B) 18  
C) 24  
D) 10  
E) 20



**PROBLEMA N° 276**

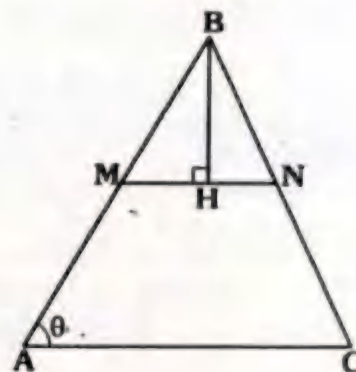
En un trapecio ABCD;  $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$  se ubica el punto medio M de  $\overline{CD}$ ; se traza  $\overline{MH} \perp \overline{AD}$  tal que  $BA=BM$ ;  $\overline{MB} \perp \overline{AB}$ ;  $m\angle MBC = 26,5$ . Calcule la medida del ángulo formado por  $\overline{AM}$  y  $\overline{BH}$ .

- A)  $62,5^\circ$                       B)  $63,5^\circ$                       C)  $64,5^\circ$   
D)  $65,5^\circ$                       E)  $66,5^\circ$

**PROBLEMA N° 277**

Según el gráfico, calcule el valor de  $\theta^\circ$ ; si  $AC=3(MN)$ ,  $AM=10$ ,  $BH=4$  y  $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$

- A)  $30^\circ$   
B)  $60^\circ$   
C)  $45^\circ$   
D)  $37^\circ$   
E)  $53^\circ$



**PROBLEMA N° 278**

Por el incentro de un triángulo ABC se traza rectas paralelas a los lados  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  que intersecan al lado  $\overline{AC}$  en los puntos P y Q respectivamente. Calcule PQ, si  $AB=5$ ,  $BC=7$  y  $AC=6$ .

- A) 2                      B) 1                      C) 3  
D) 1,5                      E) 2,5

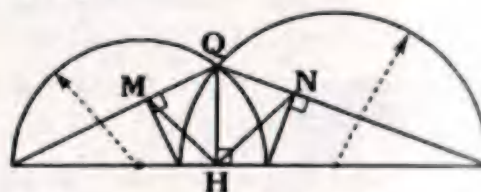
**PROBLEMA N° 279**

Se tiene un triángulo rectángulo isósceles ABC recto en B, en  $\overline{BC}$  se ubica el punto H y en la región exterior relativa a  $\overline{BC}$  se ubican los puntos P y Q, tal que HPQC es un cuadrado, calcule la medida del ángulo determinado por  $\overline{AP}$  y  $\overline{BQ}$ .

- A)  $45^\circ$                       B)  $60^\circ$                       C)  $75^\circ$   
D)  $53^\circ$                       E)  $30^\circ$

**PROBLEMA N° 280**

En el gráfico,  $HM=a$  y  $HN=b$ . Calcule QH.



- A)  $\sqrt{ab}$       B)  $\sqrt{2ab}$       C)  $2\sqrt{ab}$   
 D)  $\frac{a+b}{2}$       E)  $\sqrt{a^2+b^2}$

**PROBLEMA N° 281**

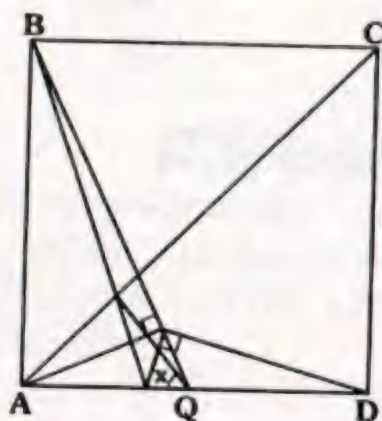
Se tiene el triángulo ABC, exteriormente se trazan los cuadrados ABMN y BCQR. Si  $MC=2\sqrt{2}$ , calcule NQ.

- A) 2      B)  $2\sqrt{2}$       C) 4  
 D)  $4\sqrt{2}$       E) 6

**PROBLEMA N° 282**

En el gráfico, ABCD es un cuadrado y  $AB=2(AQ)$ . Calcule x.

- A)  $37^\circ$   
 B)  $67,5^\circ$   
 C)  $22,5^\circ$   
 D)  $45^\circ$   
 E)  $53^\circ$



**PROBLEMA N° 283**

En un triángulo ABC:  $AB=8u$  y  $BC=6u$ . Se traza la bisectriz exterior  $\overline{BP}$ , siendo M punto medio de  $\overline{BP}$  y  $\overline{AM} \cap \overline{BC} = \{N\}$ , calcule BN.

- A)  $2,4u$       B)  $2,8u$       C)  $3,6u$   
 D)  $2,18u$       E)  $4,8u$

**PROBLEMA N° 284**

En un triángulo ABC se traza la mediana  $\overline{AD}$ . En  $\overline{BD}$  se ubica el punto M por el

cual se traza una paralela a  $\overline{AD}$  que intersecta a  $\overline{AB}$  en P y la prolongación de  $\overline{CA}$  en Q. Calcule AD, si  $MP=2u$  y  $PQ=3u$ .

- A)  $2,4u$       B)  $2,8u$       C)  $3,0u$   
 D)  $3,2u$       E)  $3,5u$

**PROBLEMA N° 285**

En un triángulo ABC la ceviana BD y la mediana BE trisecan al ángulo ABC, (D en  $\overline{AE}$ ) y  $AD=2DE$ , calcule  $m\angle DBE$ .

- A)  $30^\circ$       B)  $22,5^\circ$       C)  $45^\circ$   
 D)  $18,5^\circ$       E)  $26,5^\circ$

**PROBLEMA N° 286**

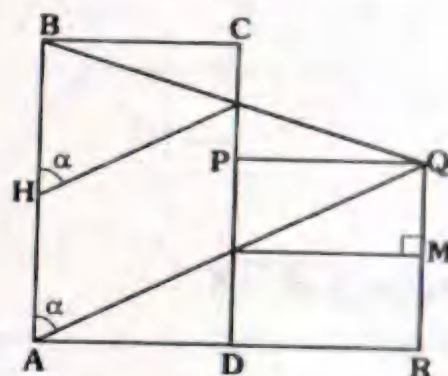
En un triángulo rectángulo ABC recto en B, la ceviana BE interseca a la bisectriz interior AD en su punto medio M. Si  $12(AB)=5(AC)$ , hallar la razón entre BE y AD.

- A)  $\frac{13}{17}$       B)  $\frac{15}{19}$       C)  $\frac{17}{22}$   
 D)  $\frac{19}{23}$       E)  $\frac{21}{26}$

**PROBLEMA N° 287**

Sean ABCD y PQRD rectángulos. Si  $MR=3(QM)$  y  $BH=6$ , calcule HA.

- A) 1  
 B) 2  
 C) 3  
 D) 4  
 E) 4,5





**PROBLEMA N° 288**

En un triángulo ABC la bisectriz interior AP, la mediana BR y la ceviana CQ concurren en D. Si  $3(BQ)=4(PQ)$ , calcule la razón entre AD y DP.

- A)  $\frac{3}{4}$                       B)  $\frac{7}{3}$                       C)  $\frac{7}{4}$   
D)  $\frac{9}{5}$                       E)  $\frac{8}{3}$

**PROBLEMA N° 289**

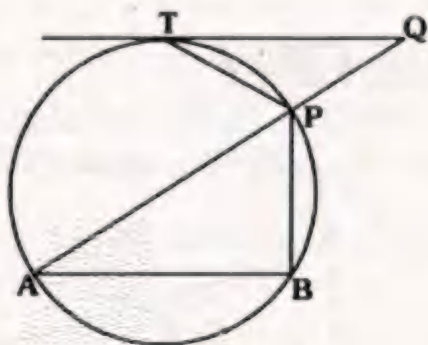
En un cuadrado ABCD se ubican los puntos E y F, ambos en  $\overline{AD}$ , tal que  $AE=3u$ ,  $EF=2u$  y  $FD=1u$ . Calcule la longitud del segmento determinado en  $\overline{AC}$  por  $\overline{BE}$  y  $\overline{BF}$ .

- A)  $\frac{6\sqrt{2}}{13}u$     B)  $\frac{8\sqrt{2}}{15}u$     C)  $\frac{8\sqrt{2}}{11}u$   
D)  $\sqrt{2}u$     E)  $\frac{8\sqrt{5}}{13}u$

**PROBLEMA N° 290**

En el gráfico mostrado, T es punto de tangencia y  $\overline{TQ} \parallel \overline{AB}$ . Si  $TP=3(PB)=3$ , calcule PQ.

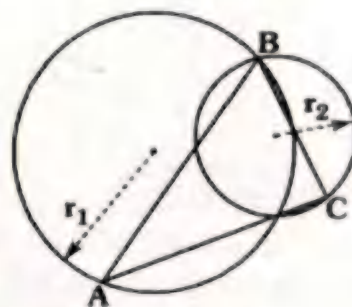
- A) 4  
B) 5  
C) 9  
D) 12  
E) 13



**PROBLEMA N° 291**

En el gráfico,  $r_1(BC)=K$ , calcule  $r_2(AB)$ .

- ❖ A) K  
❖ B)  $K\sqrt{2}$   
❖ C) 2K  
❖ D)  $\frac{K}{2}$   
❖ E)  $\frac{K\sqrt{2}}{2}$



**PROBLEMA N° 292**

En la hipotenusa de un triángulo rectángulo ABC recto en B, se ubican los puntos P y Q, tal que el triángulo PBQ es equilátero. Calcule PQ, si  $AP=5u$  y  $QC=6u$ .

- ❖ A) 6u                      B) 12u                      C) 8u  
❖ D) 4u                      E) 15u

**PROBLEMA N° 293**

En una semicircunferencia de diámetro  $\overline{AD}$  se inscribe el cuadrilátero ABCD, tal que  $BC=CD=2u$  y  $AD=8u$ . Calcule AB.

- ❖ A) 6u                      B) 7u                      C) 8u  
❖ D) 4u                      E) 5u

**PROBLEMA N° 294**

En el triángulo ABC las cevianas interiores  $\overline{AQ}$ ,  $\overline{CP}$  y  $\overline{BR}$  concurren en M. Si  $AM=MQ$  y  $RC=2(AR)$ ; calcule  $MP/MC$ .

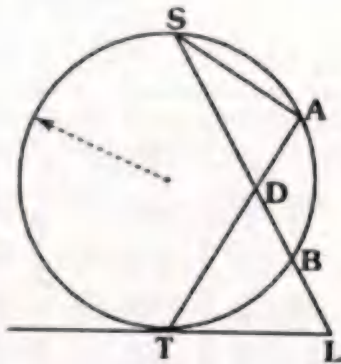
- ❖ A)  $\frac{1}{2}$                       B) 2                      C)  $\frac{1}{3}$   
❖ D)  $\frac{2}{3}$                       E)  $\frac{3}{4}$

**PROBLEMA N° 295**

De la figura, TDL es un triángulo equilátero,  $AD=2$  y  $TL=3$ . Calcule AS. (T es punto

de tangencia).

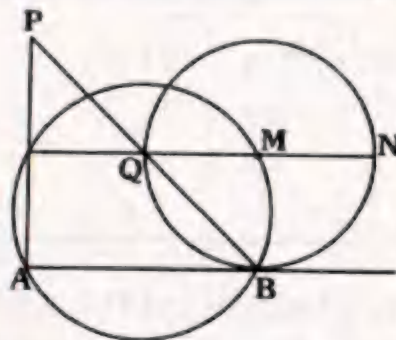
- A)  $\sqrt{5}$
- B)  $\sqrt{15}$
- C)  $\sqrt{10}$
- D)  $\sqrt{7}$
- E) 3



**PROBLEMA N° 296**

En el gráfico, B es punto de tangencia, si  $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$  y  $3(PQ) = 2(BQ)$ . Calcule  $MN/AB$ .

- A) 2/5
- B) 1/5
- C) 3/5
- D) 4/5
- E) 3/10



**PROBLEMA N° 297**

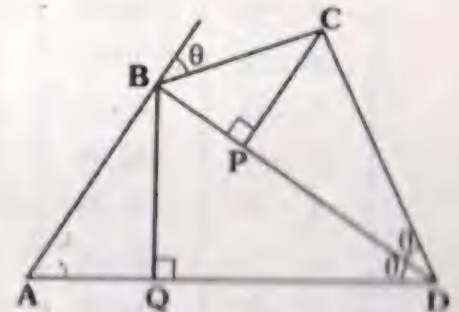
Por el incentro de un triángulo ABC se traza la recta  $\mathcal{L}$ , que interseca a  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  de modo que las distancias de A y C hacia  $\mathcal{L}$  son 2 y 8 respectivamente. Si  $\frac{AB}{5} = \frac{BC}{6} = \frac{AC}{7}$ , calcule la distancia de B hacia  $\mathcal{L}$ .

- A)  $\frac{55}{7}$
- B) 7
- C)  $\frac{52}{7}$
- D)  $\frac{33}{7}$
- E) 6

**PROBLEMA N° 298**

Según el gráfico,  $AD = 16$ ;  $BQ = 8$  y  $CD = 9$ . Calcule CP

- A) 2
- B) 4
- C) 6
- D) 8
- E) 4,5



**PROBLEMA N° 299**

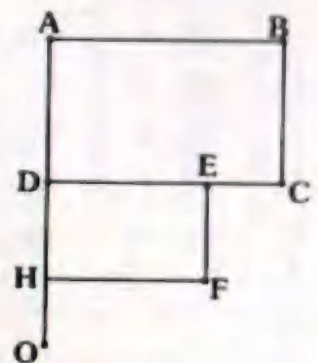
En el triángulo ABC se traza la ceviana interior BL, Q está en  $\overline{BL}$ , si  $3(BC) = 2(AB)$ ,  $AQ = 9$ ,  $BQ = 6$  y  $QC = 4$ . Calcule  $AL/LC$ .

- A) 3/2
- B) 9/4
- C) 4/9
- D) 5/3
- E) 4

**PROBLEMA N° 300**

ABCD y DEFH son rectángulos semejantes  $AB = 9$ ,  $AD = 5$  y  $DO = 7$ . Los puntos O, E y B son colineales, lo mismo que O, F y C. Entonces  $DE + EF + OB + OE$ , es:

- A) 29
- B) 31
- C) 40
- D) 31,9
- E) 29,9





# CLAVES DE RESPUESTAS

## ANUAL

1. D	10. C	19. D	28. C	37. A	46. A	55. C
2. A	11. C	20. C	29. C	38. D	47. C	56. E
3. B	12. C	21. C	30. A	39. A	48. C	57. A
4. B	13. A	22. D	31. E	40. B	49. B	58. B
5. D	14. B	23. B	32. B	41. A	50. C	59. B
6. C	15. A	24. A	33. D	42. B	51. C	60. D
7. B	16. A	25. D	34. A	43. D	52. B	
8. E	17. C	26. C	35. D	44. A	53. D	
9. D	18. A	27. E	36. E	45. A	54. C	

## CEPRE-UNI

61. C	73. C	85. B	97. D	109. D	121. B	133. C
62. D	74. B	86. D	98. C	110. A	122. C	134. B
63. B	75. C	87. D	99. C	111. C	123. B	135. C
64. D	76. B	88. C	100. C	112. *	124. D	136. D
65. B	77. B	89. D	101. D	113. C	125. D	137. B
66. B	78. D	90. B	102. B	114. *	126. E	138. B
67. B	79. C	91. D	103. E	115. B	127. E	139. D
68. C	80. B	92. A	104. C	116. E	128. D	140. C
69. E	81. B	93. C	105. E	117. D	129. B	
70. E	82. C	94. A	106. B	118. C	130. D	
71. D	83. C	95. D	107. C	119. E	131. B	
72. D	84. E	96. D	108. E	120. A	132. C	

(\*) Problemas demostrativos

**SEMESTRAL**

141. D	150. A	159. B	168. C	177. B	186. E	195. C
142. B	151. A	160. D	169. D	178. D	187. C	196. B
143. C	152. B	161. B	170. B	179. E	188. B	197. B
144. D	153. A	162. D	171. C	180. B	189. D	198. C
145. B	154. D	163. B	172. B	181. A	190. C	199. C
146. C	155. D	164. C	173. E	182. A	191. C	200. A
147. D	156. A	165. D	174. B	183. D	192. C	
148. D	157. B	166. E	175. D	184. B	193. D	
149. B	158. D	167. C	176. D	185. D	194. B	

**SEMESTRAL INTENSIVO**

201. E	210. B	219. E	228. B	237. A	246. B	255. E
202. A	211. C	220. B	229. A	238. E	247. A	256. B
203. *	212. B	221. *	230. A	239. A	248. C	257. E
204. A	213. C	222. B	231. B	240. B	249. E	258. B
205. A	214. C	223. D	232. B	241. B	250. B	259. C
206. B	215. A	224. C	233. E	242. E	251. *	260. E
207. D	216. E	225. B	234. E	243. B	252. *	
208. B	217. B	226. B	235. B	244. E	253. *	
209. B	218. E	227. A	236. B	245. *	254. *	

**REPASO**

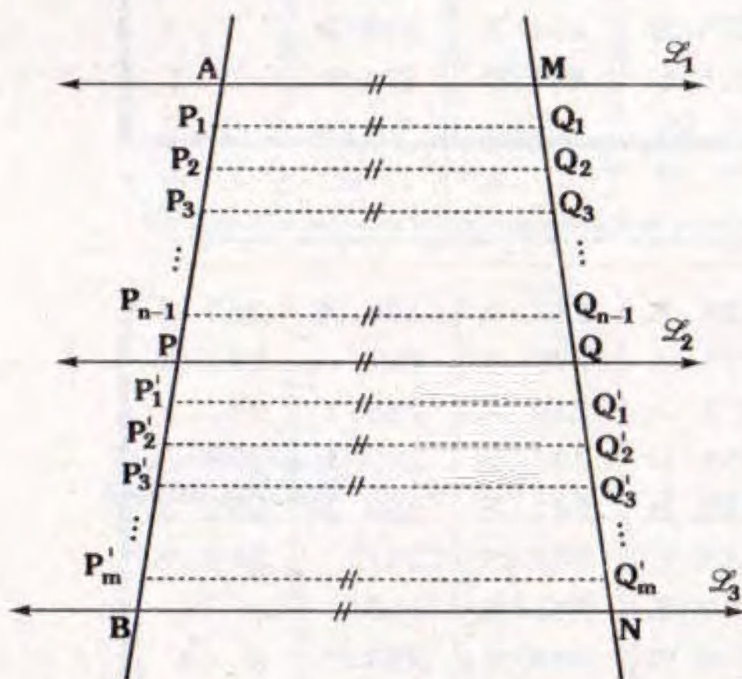
261. E	267. D	273. A	279. A	285. C	291. A	297. A
262. E	268. B	274. D	280. A	286. C	292. B	298. C
263. D	269. D	275. E	281. C	287. B	293. B	299. B
264. D	270. D	276. B	282. D	288. C	294. C	300. D
265. C	271. B	277. E	283. E	289. C	295. C	
266. A	272. B	278. A	284. E	290. C	296. C	

(\*) Problemas demostrativos



## ANEXOS

### DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE TALES



Sea  $\vec{L_1} \parallel \vec{L_2} \parallel \vec{L_3}$

$$\frac{AP}{PB} = x$$

$x \in I$  (Irracional)

Vamos a demostrar:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{MQ}{QN}$$

- En las páginas 8 y 9 demostramos el teorema en el caso en que "x" era racional, con la misma idea daremos la prueba en general.

- Ubicamos en  $\overline{AP}$ , los puntos  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}$  tal que:

$$AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = \dots = P_{n-1}P = \frac{AP}{n} = \mathcal{E}$$

- Sea "m" el cociente y "r" el resto de dividir PB por  $\mathcal{E}$ , ubicamos  $P'_1, P'_2, P'_3, \dots, P'_m$  en  $\overline{PB}$ , tal que

$$PP'_1 = P'_1P'_2 = P'_2P'_3 = \dots = P'_{m-1}P'_m = \mathcal{E} \quad \text{y} \quad P'_mB = r < \mathcal{E}$$

- Se trazan las paralelas por  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}, P'_1, P'_2, \dots, P'_m$  las cuales cortan a  $\overline{MN}$  en  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots, Q_{n-1}, Q'_1, Q'_2, \dots, Q'_m$  respectivamente.

- Por teorema (de las equiparalelas):

$$MQ_1 = Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = \dots = Q_{n-1}Q_n = \mathcal{E}'$$

$$QQ'_1 = Q'_1Q'_2 = Q'_2Q'_3 = \dots = Q'_{m-1}Q'_m = \mathcal{E}'$$

$$Q'_mN = r' < \mathcal{E}$$

- Luego tenemos:

$$AP = n\mathcal{E} \quad ; \quad PB = m\mathcal{E} + r$$

$$MQ = n\mathcal{E}' \quad ; \quad QN = m\mathcal{E}' + r'$$

$$\Rightarrow \left| \frac{PB}{AP} - \frac{QN}{MQ} \right| = \left| \frac{r}{\mathcal{E}} - \frac{r'}{\mathcal{E}'} \right| = \left| \frac{r}{AP} - \frac{r'}{MQ} \right|$$

- Como  $\frac{r}{AP} < \frac{1}{n}$  y  $\frac{r'}{MQ} < \frac{1}{n}$

$$\text{También: } \underbrace{\left| \frac{PB}{AB} - \frac{QN}{MQ} \right|}_{\text{No depende de "n"}} = \left| \frac{r}{AP} - \frac{r'}{MQ} \right| < \frac{r}{AP} + \frac{r'}{MQ} < \frac{2}{n}$$

- Para que  $\left| \frac{PB}{AB} - \frac{QN}{MQ} \right|$  sea menor que  $\frac{2}{n}$  para todo entero positivo, debe ser cero por lo tanto:  $\frac{PB}{AP} = \frac{QN}{MQ}$  como queríamos demostrar.

## SEMEJANZA DE DOS FIGURAS

Sean  $F$  y  $F'$  dos figuras del plano o del espacio y " $r$ " un número real positivo.

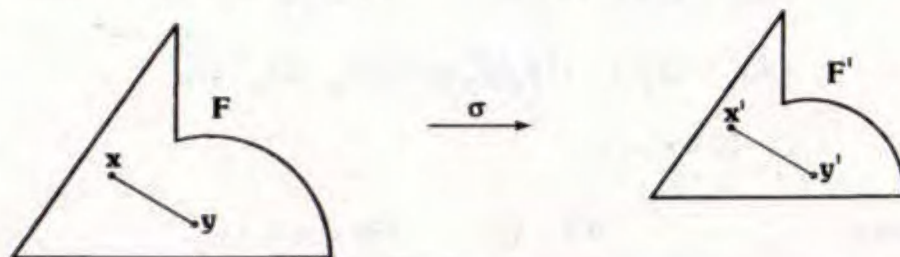
Se dice que  $F$  y  $F'$  son semejantes, con razón de semejanza " $r$ ", cuando existe una correspondencia biyectiva  $\sigma: F \rightarrow F'$ , entre los puntos de  $F$  y los puntos de  $F'$ , con la siguiente propiedad.

Si  $X$  e  $Y$  son puntos arbitrarios de  $F$  y  $X' = \sigma(X)$ ,  $Y' = \sigma(Y)$  son sus correspondientes en  $F'$  entonces:  $X'Y' = r(XY)$ .

La correspondencia biyectiva de  $\sigma: F \rightarrow F'$ , con esta propiedad de multiplicar las distancias por el factor constante " $r$ ", se llama semejanza de razón " $r$ " entre  $F$  y  $F'$ . Si  $X' = \sigma(X)$ , se dice que los puntos  $X$  y  $X'$  son homólogos.



Evidentemente, toda figura es semejante así misma, porque la función identidad  $\sigma : F \rightarrow F$  es una semejanza de razón 1.

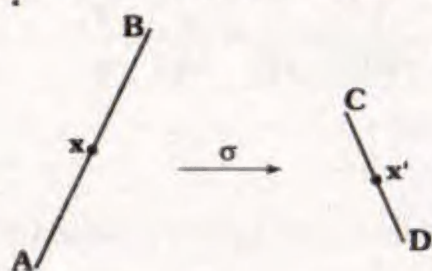


También, si  $F$  es semejante a  $F'$ , entonces  $F'$  es semejante a  $F$ , porque dada la semejanza  $\sigma : F \rightarrow F'$  de razón  $r$ , la función inversa  $\sigma^{-1} : F' \rightarrow F$  es una semejanza de razón  $\frac{1}{r}$ .

Se tiene también la transitividad:

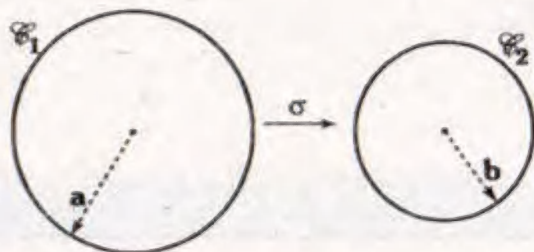
$$F_1 \sim F_2 \wedge F_2 \sim F_3 \rightarrow F_1 \sim F_3$$

Con la definición dada, es fácil probar lo siguiente:



Dos segmentos son semejantes,  
con razón :  $\frac{AB}{CD}$

Notación :  $\overline{AB} \sim \overline{CD}$

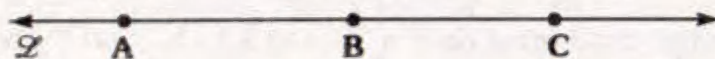


Dos circunferencias son semejantes,  
con razón :  $\frac{a}{b}$

Notación :  $\mathcal{C}_1 \sim \mathcal{C}_2$

## SEGMENTOS DIRIGIDOS

A un segmento además de su longitud se le asocia la noción de signo.



En la recta  $\mathcal{L}$  se ubican los puntos A, B y C, vamos a asociar la idea de dirección, si vamos de A hacia B, tenemos el segmento dirigido  $\overline{AB}$  y si vamos de B hacia A, tenemos el segmento dirigido  $\overline{BA}$ , se cumple que  $|\overline{AB}| = |\overline{BA}|$ , sus magnitudes son iguales pero direcciones contrarias:  $\overline{AB} = -\overline{BA}$ .

En el nivel pre-universitario por fines prácticos no usamos los segmentos dirigidos, pero en nivel universitario, veremos la importancia de dichos conceptos.

### IMPORTANTE

- También:  $AB + BA = 0$
- En el gráfico, se cumple:  $AB + BC + CA = 0$

## DIVISIÓN DE UN SEGMENTO

Veamos la importancia del concepto de segmento dirigido:



$$\frac{AP}{PB} > 0 \quad \dots \text{P está entre A y B (P} \neq \text{A y P} \neq \text{B)}$$

$$\frac{AQ}{QB} < 0 \quad \dots \text{Q está en la prolongación de } \overline{AB} \text{ o de } \overline{BA}.$$

Ahora queda claro que si:  $\frac{AP_1}{P_1B} = \frac{AP_2}{P_2B} \Rightarrow P_1 = P_2$

- La división armónica debe expresarse así:  $\frac{AP}{PB} = -\frac{AQ}{QB}$
- Pues P divide internamente a  $\overline{AB}$  y Q divide externamente.

